文章编号：1672-2892(2010)06-0678-04

# 一种新的变步长ELMS算法在噪声抵消中的应用

张守勇，孙丽君，王香丽

(河南工业大学，信息科学与工程学院，河南 郑州 450052)

**摘　要**：为了寻求高效快速的自适应算法，在 ELMS 算法基础上，提出了一种用均方误差和误差的相关性来调节步长的混合变步长 ELMS(MVSS-ELMS)算法。该算法符合步长调整原则，并在抗噪性、有效性方面有了很大改善，同时具有比传统的 LMS,ELMS 算法收敛速度快，稳态失调小等优点。计算机仿真结果表明，新算法在自适应噪声抵消中的综合性能优于 LMS 及 ELMS 算法。

**关键词**：自适应滤波；噪声抵消；LMS算法；　ELMS算法

**中图分类号**：TN911.7　　　　**文献标识码**：A

# A new Mixed Variable Step Size ELMS algorithm and its application in ANC

ZHANG Shou-yong，SUN Li-jun，WANG Xiang-li

(School of Information Science and Engineering，Henan University of Technology，Zhengzhou Henan 450052，China)

**Abstract**：In order to find an efficient adaptive algorithm，a new Mixed Variable Step Size ELMS algorithm(MVSS-ELMS) based on Extended Least Mean Square(ELMS) algorithm is proposed in this paper. This new algorithm combines the mean square error and the correlation of the error to modify the step size. The new algorithm has been improved in anti-noise capacity and effectiveness for it fitting the principal of adjusting step-size；meanwhile，it has the superiority in convergence rate and steady-state compared to Least Mean Square(LMS) and ELMS. Computer simulations indicate that the performance of the new algorithm is better than that of LMS and ELMS on Adaptive Noise Cancellation(ANC).

**Key words**：adaptive filtering；noise cancellation；Least Mean Square algorithm；Extended Least Mean Square algorithm

LMS 算法由于其具有算法简单，计算复杂度低等优点，一直以来都是在自适应噪声对消(ANC)中比较经典的算法，然而在存在噪声的情况下，用 LMS 算法进行自适应滤波将会产生较大的稳态误差。固定步长 ELMS 算法在收敛速度和收敛精确度方面对 $\mu$ 的大小要求是相互矛盾的，文献[1]提出一种基于预测误差的平方来调节步长的方法，此算法(VSS-ELMS)易受独立噪声的影响。文献[2]对用误差的相关性调节步长的算法(VFSS-ELMS)进行了分析，指出在高阶滤波器中自适应误差在接近最佳值时是不相关的，而且在收敛过程中其相关性也可能很小，故而造成在系统自适应过程中步长减小过快，导致迭代次数增多，收敛速度变慢，所以在有限的时间内会导致算法的性能变差。为了改善 LMS 算法的性能，本文基于 ELMS(Extended LMS)算法，加以改进。

## 1　ELMS 算法

LMS算法是基于最陡下降算法，用瞬时误差梯度 $\hat{\nabla}(n)$ 代替均方误差梯度 $\nabla(n)$ 进行运算：

$$\begin{cases}\hat{\nabla}\left(n\right) = -2\mathrm{e}(n)\boldsymbol{X}(n)\\ \nabla(n) = -2E[e(n)\boldsymbol{X}(n)]\end{cases} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{X}(n)=[n_{10}(n),n_{11}(n),\cdots,n_{1L}(n)]^{\mathrm{T}}$ 为参考信号。分别将误差 $e(n)=d(n)-y(n)=s(n)+n_0(n)-y(n)$ 与输出 $y(n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{W}(n)$ 带入式(1)得：

**收稿日期**：2010-04-13；**修回日期**：2010-05-14

**基金项目**：2009 郑州市科技攻关资助项目(2-41)

$$\begin{cases}\nabla(n) = -2E[e(n)\boldsymbol{X}(n)] = -2E\{[n_0(n) - \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{W}(n)]\boldsymbol{X}(n)\} \\ \hat{\nabla}(n) = -2e(n)\boldsymbol{X}(n) = -2s(n)\boldsymbol{X}(n) - 2[n_0(n) - \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{W}(n)]\boldsymbol{X}(n)\end{cases} \tag{2}$$

通过比较上式可以发现瞬时误差 $\hat{\nabla}(n)$ 中附加了一项误差矢量 $-2s(n)\boldsymbol{X}(n)$，当LMS算法趋近于收敛时，式(2)中第2项将趋近于零，此时瞬时误差梯度值 $\hat{\nabla}(n)$ 将正比于 $-2s(n)\boldsymbol{X}(n)$，使稳态误差受到有用信号 $s(n)$ 的调制。在LMS算法中利用 $\hat{\nabla}(n)$ 来替代 $\nabla(n)$ 虽然便于系统实时实现，但带来了不必要的误差，当 $s(n)$ 的幅度变化比较大时尤为明显。为此，在本文中将用到ELMS算法[3-4]。在该算法中，采用了修正的瞬时梯度估计值：

$$\hat{\nabla}(n)_{\mathrm{ELMS}} = -2[e(n) - \hat{s}(n)]\boldsymbol{X}(n) = -2[s(n) - \hat{s}(n)]\boldsymbol{X}(n) - 2[n_0(n) - \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{W}(n)]\boldsymbol{X}(n) \tag{3}$$

式中 $\hat{s}(n)$ 为$n$时刻有用信号 $s(n)$ 的预测估计值。相应的，ELMS算法的权值更新式可以表述为：

$$\boldsymbol{W}(n+1) = \boldsymbol{W}(n) + 2\mu[e(n) - \hat{s}(n)]\boldsymbol{X}(n) \tag{4}$$

在求 $s(n)$ 的预测估计值 $\hat{s}(n)$ 时采用维纳预测估计器进行估计，此估计器的ELMS算法如图1所示。相应的ELMS算法的迭代公式为[5]：

$$\begin{cases}e(n)=d(n)-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{W}(n) \\ \boldsymbol{W}(n+1)=\boldsymbol{W}(n)+2\mu[e(n)-\hat{s}(n)]\boldsymbol{X}(n) \\ \hat{s}(n)=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{W}_1(n) \\ \boldsymbol{W}_1(n+1)=\boldsymbol{W}_1(n)+2\mu[e(n)-\hat{s}(n)]\boldsymbol{E}(n)\end{cases} \tag{5}$$

式中 $\boldsymbol{E}(n) = [e(n), e(n-1), \cdots, e(n-L+1)]^{\mathrm{T}}$，$L$是自适应维纳预测估计器的阶数，采用这种估计器信号的估计值 $\hat{s}(n)$ 可以有效实时地跟踪有用信号 $s(n)$，始终逼近 $s(n)$，可以保证ELMS算法的优越性，且计算量仅增加2$L$次乘法与$L$次加法，当$L$选择合适时，计算量增加是有限且可以接受的。一般情况下进行此番修正之后，ELMS 算法的稳态性能要比LMS算法优越，而且 $s(n)$ 的预测估计值 $\hat{s}(n)$ 越接近 $s(n)$，ELMS 算法的稳态性能越好。

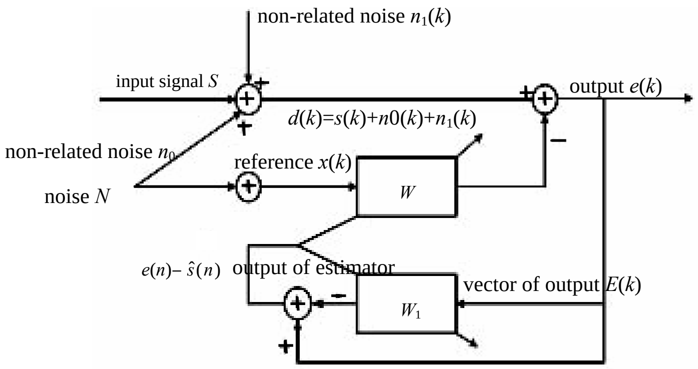

Fig.1 ELMS algorithm with Wiener predictor
图 1 采用维纳预测估计器的 ELMS 算法结构图

## 2　MVSS-ELMS算法

在实际应用中主输入端不可避免地存在噪声，减少步长因子 $\mu$ 可以提高收敛准确度，减少稳态失调噪声，但 $\mu$ 的减少将导致收敛速度和跟踪速度降低，因此可以采用变步长的思想解决以上矛盾。在文献[1]中引用了一种调节步长的方法：基于预测误差的平方来调节步长，可以将此步长调节方法应用于 ELMS 算法从而得到一种变步长 ELMS 算法(笔者称这种方法为 VSS-ELMS 算法)，但是该算法主要的缺点就是极易受独立噪声的影响。而文献[2]中作者提出了一种新的变步长控制方法，即用信号误差的相关性来调节步长，将这种控制法应用于 ELMS 算法中得出 VFSS-ELMS 算法，通过文献[2]的分析可以看出在滤波器的阶数比较大时，自适应误差在接近最佳值的时候是不相关的，同时在收敛过程中自适应误差的相关性也可能很小，这就极有可能造成在系统自动调整过程中步长减小过快，从而使得迭代次数增多，收敛速度变慢，导致在有限的时间内算法的性能变差。在分析了以上 2 种变步长控制方法的优缺点的基础上，本文提出了一种新的混合变步长 ELMS 算法(MVSS-ELMS)，如式(8)所示，在该算法中将结合均方误差和误差的相关性调节步长的思想[6-7]，这样不仅可以具有好的抗干扰能力，也使因变步长过小导致收敛变慢的情况得到改善。

$$\begin{aligned}p(n) &= \beta p(n-1) + (1-\beta)[(e(n)-\hat{s}(n))(e(n-1)-\hat{s}(n-1)) + (e(n)-\hat{s}(n))^2] = \\ &\beta p(n-1) + (1-\beta)\{[e(n)-\hat{s}(n)][(e(n-1)-\hat{s}(n-1)) + (e(n)-\hat{s}(n))]\}\end{aligned} \tag{6}$$

$$\mu(n+1) = \alpha\mu(n) + U_{\max}\left[(1-\alpha)(1-\frac{1}{1+bp^2(n)})\right] \tag{7}$$

$$\boldsymbol{W}(n+1)=\boldsymbol{W}(n)+2\mu(n)\left[e(n)-\hat{s}(n)\right]\boldsymbol{X}(n) \tag{8}$$

在初始收敛阶段均方误差及误差相关性结合值 $p(n)$ 较大，因此步长因子也会很大，算法有较快的收敛速度，而在算法收敛后，步长就保持为一个较小的值，可以使系统具有较小的稳态失调量，这种步长控制法符合步长调整原则[8]，即当权向量远离最佳权向量 $W^*$ 时，使用较大的步长，加快收敛速度；当权向量接近最佳权向量 $W^*$ 时，采用较小的步长，在 $W^*$ 附近产生较小的失调。因此将该步长调整算法应用于ELMS，一方面可以保证ELMS算法的优越性；另一方面又兼顾了算法在自适应开始时高收敛速度和收敛时的较小失调量[9]。

## 3 计算机仿真结果及分析

本文通过计算机仿真来检验和分析给出的混合变步长ELMS自适应滤波算法的性能，为便于比较，本文中的计算机仿真条件如下：

1) 自适应滤波器阶数$L$=4；2) 有用输入信号 $S(n)$ 为标准正弦信号；3) 参考输入信号 $X(n)$ 为与输入信号信噪比为10 dB的高斯白噪声，并将此白噪声作为有用信号的干扰信号 $N(n)$；本文算法 $U_{max}$=0.25，初始步长均为0。用该改进ELMS算法的噪声消除效果如图2所示，从图2中可以看出改进后的ELMS算法具有较快的收敛速度和比较好的噪声抵消性能。

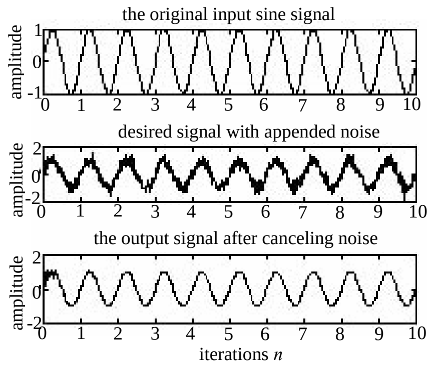


Fig.2 Output signal of MVSS-ELMS algorithm

图 2 采用 MVSS-ELMS 算法的输出信号

维纳预测估计器的步长$\mu$=0.5，自适应滤波器调节步长参数$\alpha$=0.05,$\beta$=0.1，$b$分别取0.5,50,500,5 000时，该变步长ELMS算法的收敛曲线如图3所示。由图3可知在其他参数相同的条件下，$b$的取值越大，收敛速度越快。

$\beta$是用来调节噪声的干扰的一个参量，干扰噪声 $N(n)$ 的方差越小，$\beta$取值也就越小，可以提高收敛速度；方差越大，$\beta$取值也就越大，可以提高抗噪声能力，当 $\beta$ 值越大时算法的收敛速度会相应减慢。维纳预测估计器的步长$\mu$=0.5，自适应滤波器调节步长参数$\alpha$=0.05,$b$=1 000，$\beta$分别取0.1,0.5,0.7,0.98时，该变步长ELMS算法的抗噪性能如图4所示。由图4可以看出：$\beta$越大，抗噪声性能越好。因此在实际应用中可以根据需要来选择$\beta$的取值，在本文中主要考虑改进算法的收敛性，所以一般$\beta$都取较小值0.2。

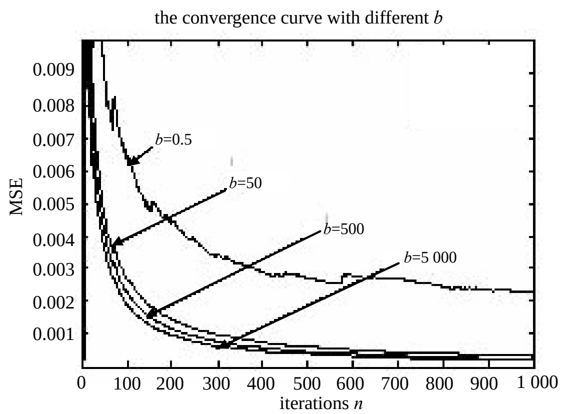


Fig Convergence curve with different $b$

图 3 $b$ 取不同值时的收敛曲线

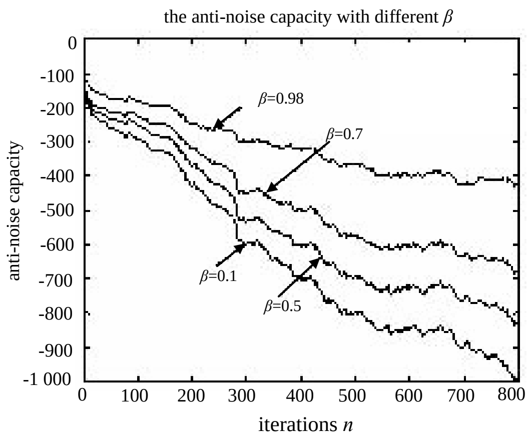


Fig.4 Anti-noise capacity with different $\beta$

图4 $\beta$取不同值时的抗噪声性能比较曲线

该改进MVSS-ELMS算法的 $e^2(n)$，$(e(n)-\hat{s}(n))^2$，$E[(e(n)-\hat{s}(n))^2]$ 的曲线如图5所示，取$\beta$=0.2,$b$=200,$\alpha$=0.05。由图5可以看出该算法具有较好的稳态收敛性。

LMS,VSS-ELMS,VFSS-ELMS,MVSS-ELMS算法的收敛曲线比较(采样点数5 000，200次独立仿真结果)如图6所示。从图6中可以看出MVSS-ELMS算法的收敛速度明显快于VSS-ELMS和VFSS-ELMS算法，而且本文算法的稳态误差也明显小于其他算法的稳态误差。

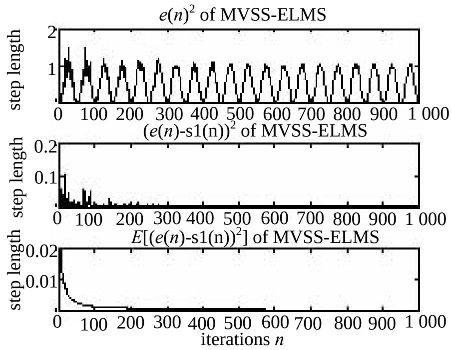

Fig.5 Error signal of MVSS-ELMS algorithm
图5 混合变步长ELMS算法的误差输出曲线

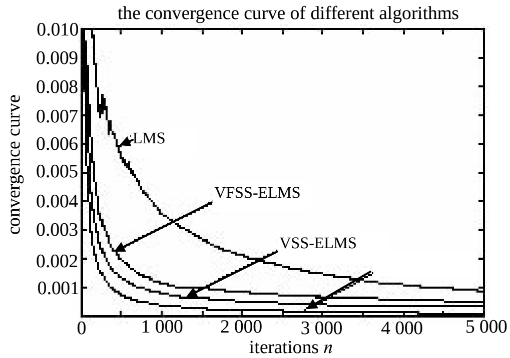

Fig.6 Convergence curves of different algorithms
图 6 多种算法的收敛曲线比较

## 4 结论

ELMS 算法用修正的瞬时梯度估计值代替了 LMS 算法中的瞬时误差梯度值,因此 ELMS 克服了 LMS 算法中用瞬时误差梯度代替均方误差梯度带来的缺点,同时在收敛速度和稳态误差等方面都有一定的优势。固定步长的 LMS 算法并不能满足实际应用中的要求，因此变步长的思想就被引入到一些常用算法中。本文就是基于在分析比较了几种变步长 ELMS 算法的基础上，提出了一种改进的混合变步长 ELMS 算法(MVSS-ELMS)。由于该算法是用均方误差以及误差的相关性来调节步长，故其在保留了 ELMS 算法优点的同时也具有变步长思想的优点，使在单独采用误差相关性调节步长时因变步长过小导致收敛变慢的情况得到改善,与单独采用均方误差的方法相比具有很好的抗干扰能力。本文首先在理论上分析了 MVSS-ELMS 算法的性能，最后通过计算机仿真验证了该算法的收敛速度及稳态误差等的优越性。

**参考文献:**


[ 1 ] Aboulnasr T,Mayyas K. A robust variable step size LMS algorithm:analysis and simulation [J]. IEEE Trans. on signal processing, 1997, 45(3):631-639.
[ 2 ] 冯存前,张永顺. 一种新的变步长LMS自适应算法及仿真[J]. 无线电工程, 2004,34(4):31-32.
[ 3 ] 冯存前,张永顺. ELMS算法及其变步长算法研究[J]. 空军工程大学学报, 2004,5(2):77-80.
[ 4 ] YU Xiao,Wang Qicai. An extended LMS algorithm in ANC[J]. ICNN SP 95, 1995(12):737-740.
[ 5 ] 虞晓,胡光锐. 自适应噪声对消中的ELMS算法及其变步长算法[J]. 上海交通大学学报, 1998,32(4):92-96.
[ 6 ] 龙宇,王忠. 一种基于解相关的变步长LMS算法[J]. 电子测量技术, 2007,30(1):52-55.
[ 7 ] 沈彩耀,李红波. 一种变步长LMS自适应滤波算法及分析[J]. 信息工程大学学报, 2006,7(2):190-192.
[ 8 ] 宋卫琴,孙丽君. 一种改进的NLMS算法在声回波抵消中的应用[J]. 信息与电子工程, 2009,7(1):41-43.
[ 9 ] Kwong R H,Johnston E W. A variable step size LMS algorithm[J]. IEEE Trans. on signal processing, 1992,40(7):1636-1642.


**作者简介:**

**张守勇**(1986-)，男，山东省临沂市人，在读硕士研究生，主要研究方向为自适应信号处理.email:zsy986212@163.com.

**孙丽君**(1968-)，女，河南省中牟县人，教授，博士，研究方向为自适应信号处理、盲信号处理等.

**王香丽**(1982-)，女， 河南省平顶山人，在读硕士研究生，研究方向为通信信号处理.