

文章编号: 1672-2892(2010)06-0702-06

分数微积分用于分形压缩图像嵌入灰度水印

黄晓晴, 于盛林

(南京航空航天大学 自动化学院, 江苏 南京 210016)

摘要: 传统的基于分形编码的水印技术一般嵌入 0,1 序列, 没有实现灰度图像嵌入。本文在研究正交化分形编码的基础上, 利用正交化分形编码参数在迭代过程中的不变性, 构造出水印嵌入变换函数, 使水印直接嵌入解码参数。分数阶微分序列的引入有效解决了嵌入水印的保密性问题, 使得在分形编码的过程中嵌入灰度水印的方法具有了可行性, 实现了图像压缩与水印嵌入一体化技术。实验结果表明, 水印嵌入对宿主图像的分形编码质量几乎没有影响, 水印提取质量好, 且采用分数阶微分序列对灰度水印进行加密效果较好。

关键词: 分数阶微分; 分形图像压缩; 灰度水印

中图分类号: TN919; TP309

文献标识码: A

Using fractional calculus to embed gray image as watermark into fractal compressed image

HUANG Xiao-qing, YU Sheng-lin

(College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu 210016, China)

Abstract: For traditional watermarking techniques based on fractal coding, watermarking format is limited to binary sequence 0,1, thus incapable of gray-scale image embedding. In this paper, a novel algorithm feasible for gray-scale watermarking embedding is proposed. To embed watermarking directly into decoding parameters, the host image is encoded with orthogonal fractal coding techniques. Because of the mean-invariant characteristics of fractal encoding parameters during iterations, the watermarking can be embedded into them. On the other hand, fractional calculus pseudo-random sequence has solved the problem that how to enhance the security of embedded watermarking and makes it possible for gray-scale watermark to be embedded during fractal encoding process. Experimental results indicate that proposed algorithm brings little contamination upon the original image, and the extracted watermarking is of good quality. The encryption for gray-scale watermark with fractional differential sequence shows good performance.

Key words: fractional calculus; fractal compressed image; gray image watermark

分形技术应用于图像压缩编码是近 15 年发展起来的一种图像压缩方法^[1-2]。随着分形图像自动编码算法的不断改进, 编码速度过慢的缺点得到改善, 分形压缩比高的特点更为突出, 使得分形在图像压缩编码中占据越来越重要的地位。随着分形编码研究的不断深入, 分形编码技术已经渗透到数字水印、特征提取、人脸识别、数据库检索、图像去噪等众多领域^[3]。其中基于分形压缩编码的数字水印技术是一种集图像压缩与水印嵌入于一体的技术, 也是当前数字水印技术研究的一个重要方向, 并且已取得了一些初步的成果。1996 年, Paute J 和 Jordan F 提出了一种基于分形图像编码理论的数字水印技术^[4]。这种传统的基于分形图像编码的数字水印技术利用了值域子块的最佳匹配子块的位置不变性, 根据最佳匹配子块所处的寻找区域来嵌入和提取有意义的水印。接着, 又有许多学者提出了其他算法, 但这类算法大都是在传统方法上的改进^[5]。从目前发表的公开文献来看, 现有基于分形的数字图像水印方案一般都是采用伪随机序列作为水印, 如何采用有意义的灰度图像作为水印是目前研究的一个方向^[6]。另一方面, 近三百多年来, 分数阶微积分已经成为数学分析的一个重要分支, 但对于工程技术界学者而言它还鲜为人知^[7]。如何将分数阶微积分应用到数字水印中去更是一个全新的研究方向^[5,8-9]。

收稿日期: 2010-04-16; 修回日期: 2010-06-23

基金项目: 江苏省自然科学基金资助项目(BK2001047); 航空科学基金资助项目(04D52032)

本文将分数阶微分的阶次作为水印的密钥,对正弦型信号进行分数阶微分,求出两个分数阶微分阶次相差很小的抽样序列的差值序列,从而生成伪随机离散序列,利用该序列对灰度水印进行加密处理,得到待嵌入的水印序列。再利用正交化分形编码参数 R 块均值在迭代过程中的不变性^[10],将水印序列植入量化的 R 块均值中,实现了把有意义的灰度图像嵌入到分形压缩图像中的数字水印嵌入方法。实验结果表明,嵌入的水印有较好的不可感知性和鲁棒性。

1 构造分数阶微积分伪随机序列

1.1 分数阶微积分定义及正弦型信号的分数阶微积分分析

在分数阶微积分理论的发展与演化过程中,许多研究者从不同的研究角度出发,给出了相应的分数阶微积分的定义。本节以 Grünwald-Letnikov 定义为例,给出分数阶微积分的定义,并给出正弦型信号的分数阶微积分分析。分数阶微积分的 Grünwald-Letnikov 定义是从研究连续函数整数阶导数的经典定义出发,将微积分的阶数与因次由整数扩大到分数推衍而来的。Grünwald-Letnikov 定义表述如下^[11-12]。

对于任意的实数 α ,记 α 的整数部分为 $[\alpha]$,假如函数 $f(t)$ 在区间 $[\alpha, t]$ 上有 $m+1$ 阶连续导数; $\alpha > 0$ 时, m 至少取 $[\alpha]$; 则定义分数阶 α 阶导数为:

$${}^G D_t^\alpha f(t) \triangleq \lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(\alpha)}(t) \triangleq \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{i=0}^{[\frac{t-\alpha}{h}]} \binom{[\frac{t-\alpha}{h}]}{i} f(t-ih) \quad (1)$$

式中 $\binom{[\frac{t-\alpha}{h}]}{i} = \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2)\cdots(-\alpha+i-1)}{i!}$ 。亦即:

$${}^G D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(\alpha)(t-\alpha)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_{\alpha}^t (t-\tau)^{-\alpha+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (2)$$

式(1)和式(2)分别是 Grünwald-Letnikov 定义的定义式和计算式。

正弦信号是在理论上和工程实际中应用广泛的一类信号,其表达式为:

$$f(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (3)$$

式中: A 为正弦信号的幅度值; ω_0 为正弦信号的角频率; φ 为初始相位值。

根据分数阶微积分公式,对正弦信号进行分数阶 ν 阶微分, $\nu \in (0,1)$, 得到的结果为^[12-13]:

$$x(t) = D^\nu \sin(\omega_0 t) = [\sin(\omega_0 t)]^{(\nu)} = \omega_0^\nu \sin(\omega_0 t + \frac{\nu\pi}{2}) \quad (4)$$

可见,对正弦信号进行分数阶微分运算后,其幅度以 ω_0 因子进行广义调幅,其相位以 $\nu\pi/2$ 进行广义希尔伯特变换^[13]。

式(4)是正弦信号连续时间变量表示式,为了将该表达式进行离散化,对分数阶微积分后的正弦信号进行等间隔周期采样,转化为离散信号。由于正弦信号的特殊性质,对正弦信号的抽样特性有以下结论:对于正弦信号的抽样,在抽样频率 f_s 位于区间 $2f_0 < f_s < 3f_0$ 内时,如果初相 φ 已知,则可以完全恢复出原始正弦信号来;如果初相 φ 值未知,则不能恢复出原始正弦信号。

因此,可以利用分数阶微积分算子 $\nu \in (0,1)$ 的特性,构造抽样频率为 $f_s = (2+\nu)f_0$, 则抽样频率 $2f_0 < f_s < 3f_0$ 。对于式(3), $\varphi = \nu\pi/2$, 也就是说,在不知道分数阶微积分参数 ν 的情况下,无法对取样前的信号进行恢复,从而保证了数据的严密性。

1.2 正弦型信号不同阶次的分数阶微分伪随机序列的差值分析

由本文 1.1 节分析可以确定,在分数阶微分算子 $\nu \in (0,1)$ 未知的情况下,采用 $f_s = (2+\nu)f_0$ 的抽样频率,得到 ν 次微分后的正弦信号的离散序列是无法进行恢复的。同时,对于两个差值非常小的微分阶次 ν_1 和 ν_2 ,对正弦信号微分处理后得到的两离散序列 $v_1(n), v_2(n)$ 的差值与 n 值的变化在一定范围内成正比。

通过仿真实验还可看出,随着 n 逐渐增大,差值的最大值和最小值都在逐渐增大,进而说明,两序列的差异很大,这种伪随机序列对微分阶次十分敏感。因此,用该差值序列对二值水印图像进行加密,能够保证水印的隐蔽性。

2 基于正交化分形图像编码的灰度水印嵌入方法

2.1 正交化分形图像编解码算法

1990年, Jacquin A E 提出了基于分块迭代函数系统 PIFS (Partitioned IFS) 的分形块编码算法^[14], 这一算法对分形压缩方法的实用化起到了奠基作用, 此后有关分形图像编码的研究都建立在此基础上。

在基本分形编码算法中, 图像被分割成大小不同的两类子块: Rang 块 (R 块) 和 Domain 块 (D 块)。其中, R 块互不重叠且覆盖整幅图像, D 块可以重叠且边长大于 R 块, 通常是 R 块的 2 倍。 D 块经 4-邻域像素平均或间距采样收缩为 R 块的大小, 这种子块的全体构成码本 Ω 。为改进图像质量, 一般还要对码块 D 进行 8 种等距变换 (Jacquin 方案中提出 $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 旋转变换和垂直中线、水平中线、 $45^\circ, 135^\circ$ 对角线反射变换)。

根据 PIFS 拼贴定理, 通过寻找合适的仿射变换 $L: \Omega \rightarrow R$, 使得 $R_i \approx L_i(D_i)$, $D_i \in \Omega$ 。传统的仿射变换用式(5)表示:

$$L(D) = s \cdot \gamma(D) + o \cdot U, D \in \Omega \quad (5)$$

式中: $\gamma(D)$ 为等距变换; s 为对比度调节因子; o 为灰度补偿因子; U 为亮度值均为 1 的常值块。对于每个 R_i 寻找其最佳匹配的 $D_{p(i)}$ 块, 根据最小二乘法准则, 得到最佳匹配的 s_i, o_i 。

每个 R 块的分形编码由 $\{k, p(i), s_i, o_i\}$ 4 个参数组成。 $p(i)$ 表示 R_i 的最佳匹配块的位置; k 表示等距变换的类型, $k=1 \sim 8$ 。解码时, 利用仿射变换迭代式(6)作用于任何初始图像完成。

$$R^{(n)} = s \cdot \gamma(D^{(n-1)}) + o \cdot U \quad (6)$$

为提高解码速度, G E Oien 和 S LepsOy 通过对编码过程算子的正交化处理, 使得解码的迭代过程可以在很有限的次数内收敛, 从而大大提高了解码速度^[15]。

正交化处理后, 分形编码参数由对比度调节因子 s 和 R 块均值 \bar{R} 代替了原来的对比度调节因子 s 和灰度补偿因子 o 。新的分形编码参数为 $\{k, p(i), s_i, \bar{R}\}$ 。正交的解码迭代式为:

$$R^{(n)} = \bar{R} \cdot U + s \cdot \gamma(D^{(n-1)} - \bar{D}^{(n-1)}U) \quad (7)$$

2.2 基于正交化分形编解码的灰度水印嵌入方法

从式(6)可以看出, 非正交化分形编码中, 参数 s_i, o_i 依赖于 D 块码本 Ω 。在该参数中嵌入水印后, 当分形压缩图像受到攻击时, 其 D 块码本 Ω 与原图像的 D 块码本很可能不同, 参数 s_i, o_i 也会不同。因此, 利用非正交化迭代, 改变分形编码参数嵌入水印的方法并不可行。而从正交化分形编码的迭代式(7)可以看出, 经 n 次迭代的均值 $\bar{R}^{(n)}$ 为: $\bar{R}^{(n)} = \bar{R} \cdot U + s \cdot \gamma(\bar{D}^{(n-1)} - \bar{D}^{(n-1)}U) = \bar{R} + s \cdot \gamma(\bar{D}^{(n-1)} - \bar{D}^{(n-1)}) = \bar{R}$, 因此, 正交分形编码的迭代过程具有 R 均值不变性, 即 $\bar{R}^{(n)} = \bar{R}^{(n-1)} = \dots = \bar{R}^{(1)} = \bar{R}$ 。这一性质为水印的嵌入提供了可能。水印嵌入参数 R , 在解码迭代过程中, 能一直保持原有水印信息不改变, 水印从而扩散到分形解码图像中。

2.2.1 构造基于正交化分形编解码的水印嵌入变换函数

灰度水印嵌入的关键问题在于如何将水印信息嵌入 R 块均值 \bar{R} , 使之能够保证含水印分形编码的质量, 又能够使水印有良好的抗攻击性。

宿主图像 $I_{N \times N}$ 为 256 级灰度图像, 其 $\bar{R} = \{\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_m\}$ 。水印图像为 $M \times M$ 大小的同样为 256 级的灰度图像 $W = \{w_1, w_2, \dots, w_{M \times M}\}$ 。由于宿主图像与水印有相同的灰度级, 若 W 直接作用于 \bar{R} , 即 $\bar{R}_w = \bar{R} + W$, 显然, \bar{R}_w 已不具备宿主图像的信息。对 W 归一化, 使得对于任意像素点 w_i , 满足 $0 \leq w_i \leq 1$ 。这样虽能降低对宿主图像的影响, 但是, 经过归一化, 当 \bar{R}_i 的值较小, w_i 值较大 (例如 $\bar{R}_i = 1, w_i = 1$) 时, 水印对解码参数 \bar{R} 的影响也越大。因此, 这种直接作用于 \bar{R} 的方法不能实现灰度水印嵌入。

为不影响嵌入水印的分形压缩图像质量, 显然要尽量减小水印嵌入对 \bar{R} 参数的影响。本文给出如下嵌入算法。

设宿主图像 $I_{N \times N}$, 经正交分形编码得到参数 $\{k, p(i), s_i, \bar{R}\}$, $\bar{R} = \{\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_m\}$ 。定义 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 域上的嵌入变换函数 $\psi(\bar{R}_w, \bar{R}, \alpha)$:

$$\bar{R}_w = \psi(\bar{R}_w, \bar{R}, \alpha) = \frac{\bar{R} \cdot (1 + \alpha \cdot \bar{W})}{(1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \alpha_j)} \quad (8)$$

式中: \tilde{W} 为灰度水印 W 经预处理后得到的水印序列, $\tilde{W} = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ 。且对于任意 $w_i, i=1, 2, \dots, m$, 满足 $0 \leq w_i \leq 1$ 。

变换式(6)中 $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ 为水印嵌入强度因子, 由向量 \tilde{W} 决定。定义 α 为:

$$\alpha_i = \begin{cases} \lambda, & \text{if } 0.5 \leq w_i \leq 1, i=1, 2, \dots, m \\ 2\lambda, & \text{if } 0 \leq w_i < 0.5, i=1, 2, \dots, m \end{cases}, \lambda \in (0, 1) \quad (9)$$

从式(7)可以看出, 强度因子 α 约束了 \bar{R}_w 的变化范围。中间变换 $\bar{R} \cdot (1 + \alpha \cdot \tilde{W})$, 使得 \bar{R} 在 $1 \sim 1 + \lambda$ 倍的范围内变化, 这样将会带来解码图像整体亮度的改变。为降低这种影响, 再用 α 均值对 \bar{R} 整体调整, 从而得到更接近 \bar{R} 的解码参数 \bar{R}_w 。这样, 用分形解码参数 $\{k, p(i), s_i, \bar{R}_w\}$ 解码, 就可得到嵌入水印的分形压缩图像。

2.2.2 分数阶微分在水印嵌入过程中的作用分析

式(9)要求水印序列 W 与 \bar{R} 等长, 首先 W 要经采样收缩或补零放大, 使之与 \bar{R} 等长。但是仅对 W 做这样的处理, 并没有将水印信息作有效地保护, 水印的抗攻击性不强。根据本文第 2 节的分析, 在水印中加入分数阶微分序列可以进一步对水印加密, 提高水印的抗攻击性。因此, 本文选取 2 个差值非常小的微分阶次 v_1 和 v_2 , 利用 $f_s = (2 + v)f_0$ 的抽样频率, 得到微分后正弦信号的 2 个离散 $v_1(n), v_2(n)$ 序列的差值序列 $v(n)$ 。应用此序列对水印进行加密, 并将加密后的水印序列嵌入到正交分形编码参数中。最终, 嵌入水印的正交分形迭代式为:

$$R_w^{(n)} = \bar{R}_w \cdot U + s \cdot \gamma (D^{(n-1)} - \bar{D}^{(n-1)}U) \quad (10)$$

2.3 水印的嵌入、提取过程

根据以上叙述, 本文提出的水印嵌入方法步骤如图 1 所示。

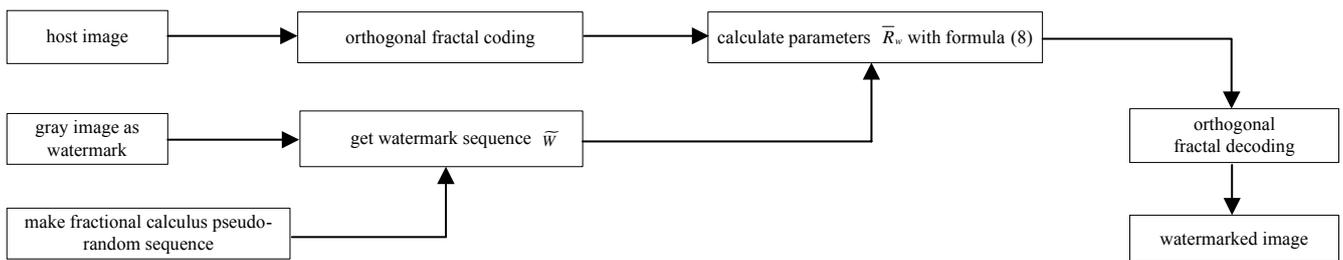


Fig.1 Watermarking embedding process
图 1 水印嵌入过程

水印的提取为水印嵌入的逆过程。计算含水印图像的各 R 块均值, 经式(10)反变换即可得到。水印嵌入过程产生的 α , 在提取和嵌入过程中不可缺少, 并且, 不同的 w_i 对应了不同的 α 。水印提取过程的流程图, 如图 2 所示。

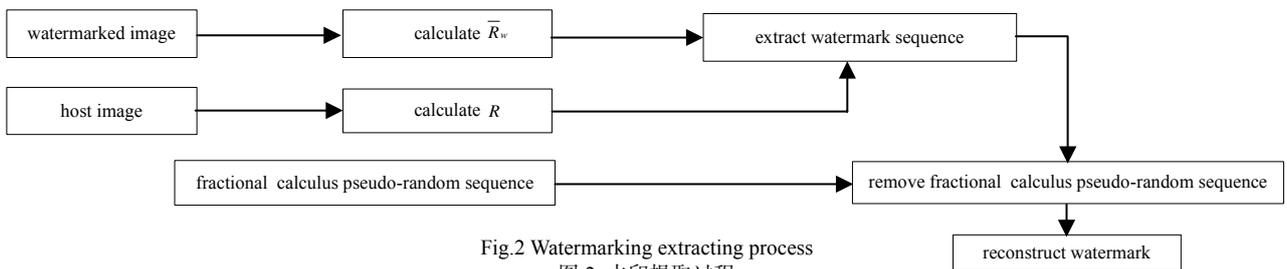


Fig.2 Watermarking extracting process
图 2 水印提取过程

3 实验结果与分析

3.1 水印的嵌入与提取实验

仿真实验中, 本文用大小为 256×256 的典型 256 级灰度图像 Lena 图作为宿主图像。用 64×64 的 2 幅灰度图像作为水印。宿主图像与水印图像如图 3 所示。在利用本文方法嵌入水印时, 本文以初相位为 0, 频率为 50 的正弦信号进行分数阶微分。微分阶次分别选择 $v_1 = 0.5135, v_2 = 0.5136$, 采用 $f_s = (2 + v)f_0$ 的抽样频率进行抽样, 得到分数阶微分差值序列 $v(n) = v_1(n) - v_2(n)$, 并选取 $n \in (10^7 - 4095, 10^7)$ 的一段序列作为水印的加密序列, 加密后的水印图像如图 4 所示。

再将加密后的水印利用本文方法嵌入宿主图像，其结果如图5所示。

从图5可以明显看出本文方法能够将加密后的水印成功嵌入宿主图像，并能较好地提取原水印。

本文用峰值信噪比(PSNR)及归一化互相关系数NC来分别衡量水印嵌入后对宿主图像的影响以及提取水印与原始水印的相似度。根据目前文献，大多采用0,1序列作为水印，不能嵌入灰度水印。因此，本文给出如图6所示的2幅二值图像作为水印，这样就和文献[10]中嵌入0,1序列作为水印是一致的，从而使本文算法与文献[10]中提出的算法有了可比性。



(a)host image Lena



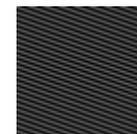
(b)watermarking 1



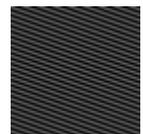
(c)watermarking 2

Fig.3 Host image and gray watermarking

图3 宿主图像及灰度水印



(a)watermarking 1



(b)watermarking 2

Fig.4 Encrypted watermarking

图4 加密后的水印



(a)extracted watermarking 1

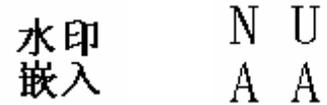


(b)extracted watermarking 2



Fig.5 Watermarked image and the extracted watermarking

图5 本文方法嵌入水印及水印提取结果



(a)binary watermarking 1



(b)binary watermarking 2

Fig.6 Binary watermarking

图6 二值水印

其计算结果如表1所示。从表中数据可以看出，本文方法与文献[10]方法对嵌入水印后的图像质量的影响基本相同。虽然本文方法提取得到的水印和文献[10]方法相比，含有较多的噪声，但是本文方法的保密性有了明显提高。

表1 本文方法与文献[10]结果比较

Table1 Comparison between the proposed method and method in literature[10]

	PSNR		NC	
	proposed method	method in literature [10]	proposed method	method in literature [10]
binary watermark 1	33.020 594	32.785 934	0.971 510	0.981 348
binary watermark 2	32.021 269	31.981 016	0.952 231	0.971 660

3.2 水印加密序列对分数阶微分阶次的敏感性分析

在提高数字水印的保密性问题上，文献[9]提出的方法，虽然可以通过对二值水印进行置乱的操作来提高水印的保密性，但水印提取时置乱操作带来的大量参数信息要和分形编码参数一起进行传输，对图像的压缩比就会有一定影响，本文方法很好地弥补了这一点。

水印提取时，如果不知道确切的分数阶微积分阶次，将无法恢复出嵌入的水印信息。即使选取与水印嵌入时使用的分数阶微积分阶次很接近的数值，仍然无法提取出水印信息，以下对水印图像的微分阶次敏感性进行分析。

水印嵌入过程中，使用的分数阶微积分阶次为 $v_1 = 0.5135, v_2 = 0.5136$ ；而在水印的提取时，适当改变分数阶微积分的阶次，使之逐渐接近 v_1, v_2 ，采用的伪随机序列都为 $n \in (10^7 - 4095, 10^7)$ 的一段随机序列。仿真得到改变阶次后提取的水印图像。由于篇幅所限，文中仅将提取水印2的结果给出，其图像如图7所示。

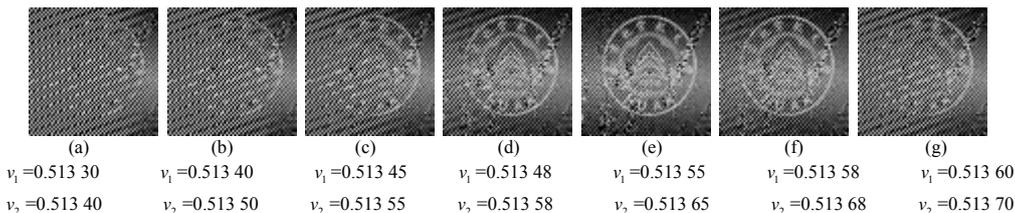


Fig.7 Extracted results after changing order of fractional differential

图7 改变阶次后水印2的提取结果

图7的结果表明，当分数阶微分的阶次发生变化时，提取到的水印质量明显下降。不难想象，通过增加分数阶微分阶次在小数点后的位数，该算法的保密性将会更强。而且从图7(a)-(g)的渐变过程可以看出，微分阶次越

接近 v_1, v_2 , 提取的水印效果越好, 这也间接地反映了分数阶微积分计算的连续性, 从而说明分数阶微积分存在的合理性。

4 结论

本文提出了一种基于分形图像编码的水印方法, 并在嵌入算法中利用分数阶微分提高了水印嵌入的保密性。分数阶微分的阶次可以作为密钥和分形编码参数一起进行图像传输, 解码时, 利用该微分阶次就可以恢复水印, 真正实现了图像压缩与水印嵌入于一体的图像传输方式。同时, 由于加密序列对于分数阶微分的阶次具有很强的敏感性, 本文方法的保密性得到进一步提高。

参考文献:

- [1] 刘勃,张在峰,马义德,等. 基于分形理论的图像压缩编码技术[J]. 信息与电子工程, 2004,2(4):246-251. (LIU Qing, ZHANG Zai-feng, MA Yi-de, et al. The Technique of Image Coding Based on Fractal Theoretics[J]. Information and Electronic Engineering, 2004,2(4):246-251.)
- [2] 陈作平,叶正麟,郑红婵,等. 基于 K 均值聚类的快速分形编码方法[J]. 中国图象图形学报, 2007,12(4):586-591. (Chen Zuo-ping, Ye Zheng-lin, ZHENG Hong-chan, et al. Fast Fractal coding technique based on K-mean clustering[J]. Journal of Image and Graphics, 2007,12 (4):586-59.)
- [3] 申小娜. 分形图像编码及其在数字水印中的应用[D]. 重庆:重庆大学, 2008. (Shen Xiao-na. Fractal image coding and its applications to digital watermarking[D]. Chongqing: Chongqing University, 2008.)
- [4] Paute J, Jordan F. Using fractal compression scheme to embed a digital signature into image[C]// Proc. SPIE Photonics East Symposium. Boston, MA:[s.n.], 1996:18-22.
- [5] 张敏瑞,明岸华. 基于分形的数字图像水印技术[J]. 航空计算技术, 2004,34(2):1-5. (ZHANG Min-rui, MING An-hua. Digital Image Watermarking Technique Based on Fractal Coding[J]. Aeronautical Computer Technique, 2004,34(2):1-5.)
- [6] 王炳锡,陈琦,邓峰森. 数字水印技术[M]. 西安:西安电子科技大学出版社, 2003. (Wang Bin-xi, Chen Qi, Deng Feng-sen. Technology of Digital Watermarking[M]. Xi'an: Xidian University Press, 2003.)
- [7] Oldham K B, Spanier J. The Fractional Calculus[M]. New York and London: Academic Press, 1974.
- [8] Yuan Xiao, Chen Xiangdong, Li Qiliang, et al. Differential operator and the construction of wavelet[J]. Acta Electronica Sinica, 2002,30(5):769-773.
- [9] Jia Huading, Pu Yifei. Application and Numerical Implementation of Fractional Calculus to Digital watermark[C]// Proceedings of 8th International Conference on Signal Processing. Beijing:[s.n.], 2006:16-20.
- [10] Pi Minghong, Li Chunhuang. A Novel Fractal Image Watermarking[J]. IEEE Transactions on multimedia, 2006,8(3):488-499.
- [11] Marcia Kleinz, Thomas J Osler. A child's garden of fractional derivatives[J]. The College Mathematics Journal, 2000,31(2): 82-88.
- [12] Kostadin Trincevski, Zivorad Tomovski. On some fractional derivatives of functions of exponential type[J]. Ser. Mat., 2002(13):77-84.
- [13] Pu Yi-fei, Yuan Xiao, Liao Ke, et al. Five Numerical Algorithms of Fractional Calculus Applied in Modern Signal Analyzing and Processing[J]. Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition), 2005,37(5):118-124.
- [14] Jacquin A E. Image coding based on a fractal theory of iterated contractive image transformations[J]. IEEE Trans. Image Process, 1992,1(1):18-30.
- [15] Øien G E, Lepsøy S. A class of fractal image coders with fast decoder convergence[M]// Fractal Image compression: Theory and Application. [s.l.]: Springer-Verlag, 1994.

作者简介:



黄晓晴(1979-), 女, 江苏省丰县人, 讲师, 在读博士研究生, 研究方向为图像处理、分形信号处理、测控技术等。email: sunnynuaa@163.com.

于盛林(1941-), 男, 江苏省扬中市人, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为信号处理、测控技术、图像处理等。