文章编号：1672-2892(2011)06-0749-05

基于 FrFT 空间目标探测与高精度频率估计

张碧雄
(中国电子科技集团公司 第二十七研究所，河南 郑州 450047)

摘 要：针对空间目标探测中低信噪比下信号检测与频率精确估计的问题，提出了基于分数阶傅里叶变换(FrFT)的实现方法。首先介绍 FrFT 进行参数估计的基本原理，在对接收回波信号的动态特性进行分析的基础上，为满足信号检测概率和实时处理要求，设计 FrFT 在空间目标检测应用中的相关参数，并提出频率估计精度的改进措施，分析了目标检测和频率估计性能。仿真分析结果表明该方法满足工程要求。

关键词：信号检测；频率估计；分数阶傅里叶变换；空间目标探测
中图分类号：TN957 **文献标识码**：A

Space target detection and accurate frequency estimation using FrFT

ZHANG Bi-xiong
(The 27th Research Institute of CETC, Zhengzhou Henan 450047, China)

Abstract: A method based on Fractional Fourier Transform(FrFT) is put forward to solve the problems in low Signal-Noise Ratio(SNR) detection and accurate frequency estimation for space target detection. At first the theory of parameter estimation by FrFT is introduced. Then, after analyzing the dynamic characteristic of the echo, the parameters of FrFT using in space target detection are designed to meet the requirements of real-time processing and high detection probability. The method of improving frequency estimation precision is proposed. The performance of target detection and frequency estimation is analyzed. The results of simulation show that the proposed method is applicable and effective.

Key words: signal detection; frequency estimation; Fractional Fourier Transform(FrFT); space target detection

随着航天技术的蓬勃发展及空间应用范围和规模的扩大，在轨运行的航天器越来越多，而且也存在大量的空间碎片。美国国防部跟踪大约 22 000 个人造在轨目标；还有成千上万个因太小而无法跟踪的其他目标，这些目标对在轨卫星也会造成危害。因此空间目标的监测与编目也就越来越重要。对空间目标的探测一般采用相控阵雷达，测量空间目标的特性，建立空间目标的运行轨道。如美国海军的“NAVSPASUR”系统、法国的 GRAVES 雷达等，由于这种雷达系统利用雷达电子波束在空间设置一道或多道拦截屏，所以通常称为“电子篱笆”[1]。

为实现空间目标的编目，首先需要实现目标的检测，并保证足够精度的多普勒频率测量。对于小尺寸空间目标的探测，除了增加雷达系统的功率孔径积以外，要提高接收机检测灵敏度。提高检测灵敏度最主要的途径就是增加相干积分时间，尽可能保持目标穿越波束的时间一致。

进行信号的检测和频率的估计常采用 FFT 算法，但 FFT 运算只能处理确定性的平稳信号。由于多普勒效应，回波信号存在多普勒和多普勒变化率，信噪比很低时，需要充分进行信号积累，在处理时间内，多普勒变化率引起的频率变化超过 FFT 的分辨率，就不能认为是平稳信号，可以等效为一线性调频(LFM)信号。对 LFM 信号，目前主要采取时频分析方法完成检测与估计，如短时傅里叶变换(STFT)和小波变换的算法，但由于窗函数的影响，其时频域分辨率受限且目标检测性能降低。利用 Wigner-Ville 分布(WVD)能够很好地实现 LFM 信号的时频分析，但对有限时间的信号信噪比要求较高，满足不了应用要求。分数阶傅里叶变换(FrFT)作为一种新的时频分析工具，对非平稳信号的分析和处理具有许多优势，特别适于处理线性调频类非平稳信号。

收稿日期：2011-06-03；**修回日期**：2011-08-16
基金项目：国家 863 计划资助项目(2010AA8080601)

1 FrFT 的基本原理

时域信号 $x(t)$ 的 p 阶 FrFT 可表示[2-7]为：

$$X_p(u)=F_p[x](u)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)K_p(t,u)\mathrm{d}t \tag{1}$$

式中：$K_p(t,u)$ 称为 FrFT 的核函数；$A_\alpha=\sqrt{1-\mathrm{j}\cot\alpha}$，$\alpha=p\dfrac{\pi}{2}$，则有：

$$K_p(t,u)=\begin{cases}A_\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi(t^2\cot\alpha-2ut\csc\alpha+u^2\cot\alpha)}, & \alpha\neq n\pi\\ \delta(t-u) & \alpha=2n\pi\\ \delta(t+u) & \alpha=(2n\pm1)\pi\end{cases} \tag{2}$$

当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时，

$$X_p(u)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ut}\mathrm{d}t \tag{3}$$

因此 FrFT 可认为是信号在时频平面内时间轴逆时针方向旋转角度 α 后构成的 FrFT 域上的信号。当旋转角度是π/2 时，FrFT 等价于傅里叶变换；当旋转角度为 2π时，FrFT 等价于原函数。

在实际应用中，需要计算的是离散形式的 FrFT。直接计算运算量很大，现在常用的是 Ozaktas 等人提出的分解型离散 FrFT，利用 FFT 减少运算量，公式[3]为：

$$X_p(m)=\frac{A_\alpha}{\sqrt{N+1}}\sum_{n=-N/2}^{N/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi(n^2\cot\alpha-2mn\csc\alpha+m^2\cot\alpha)/(N+1)}x(n) \tag{4}$$

FrFT 对 LFM 信号在某个 (α,u) 域具有最好的能量聚集特性。检测 LFM 信号的基本思路就是以旋转角 α 为变量扫描，求观测信号的 FrFT，从而形成信号能量在参数 (α,u) 平面上的二维分布，在此平面上按设定的阈值进行峰值点的二维搜索，即可检测信号并估计其参数。

假定输入信号为：

$$x(t)=A_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi f_0 t+\pi\mu_0 t^2+\varphi_0)} \tag{5}$$

式中：A_0 为信号幅度；f_0 为信号初始频率；φ_0 为初始相位；μ_0 为频率变化率。FrFT 变化后，通过门限检测，可获得峰值对应的 $(\hat{\alpha}_0,\hat{u}_0)$，则有：

$$\begin{cases}\hat{\mu}=-\cot\hat{\alpha}_0\\ \hat{f}=\hat{u}_0\csc\hat{\alpha}_0\end{cases} \tag{6}$$

2 信号特性分析

空间目标是在无动力状态下绕地球以确定轨道有规律地飞行。雷达向空间连续发射单一载频信号，空间目标经过发射波束范围时产生回波。由于多普勒效应，回波信号包含有多普勒信息，而且多普勒是变化的，其大小主要取决于信号频率、目标速度以及空间位置关系。由于目标穿越波束时间较短，可以认为多普勒变化率是恒定的。假定以圆轨道飞行，目标与地面站距离可表示为：

$$d(t)=\sqrt{R_{\mathrm{E}}^2+R^2-2R_{\mathrm{E}}R\cos\gamma(t)} \tag{7}$$

式中：R_{E} 为地球半径；R 为目标到地心距离；$\gamma(t)$ 为目标与地面站对地心夹角。

目标径向速度为：

$$\dot{d}(t)=\frac{R_{\mathrm{E}}R\sin\gamma(t)\bullet\dot{\gamma}(t)}{\sqrt{R_{\mathrm{E}}^2+R^2-2R_{\mathrm{E}}R\cos\gamma(t)}} \tag{8}$$

回波信号多普勒和多普勒变化率分别为：

$$f_d=-2\dot{d}(t)/\lambda=-\frac{2R_{\mathrm{E}}R\sin\gamma(t)\bullet\dot{\gamma}(t)}{\lambda\sqrt{R_{\mathrm{E}}^2+R^2-2R_{\mathrm{E}}R\cos\gamma(t)}} \tag{9}$$

$$\dot{f}_d=\frac{2R_{\mathrm{E}}R\sin^2\gamma(t)\bullet\dot{\gamma}^2(t)}{\lambda(\sqrt{R_{\mathrm{E}}^2+R^2-2R_{\mathrm{E}}R\cos\gamma(t)})^3}-\frac{2R_{\mathrm{E}}R\cos\gamma(t)\bullet\dot{\gamma}^2(t)+2R_{\mathrm{E}}R\sin\gamma(t)\bullet\ddot{\gamma}(t)}{\lambda\sqrt{R_{\mathrm{E}}^2+R^2-2R_{\mathrm{E}}R\cos\gamma(t)}} \tag{10}$$

式中 λ 为信号波长。

$\dot{\gamma}(t)$ 计算比较复杂，最大不超过目标角速度。则在 $\gamma(t)=90^\circ$ 时，有多普勒最大值：

$$f_{d\max}=\frac{2R\upsilon}{\lambda\sqrt{R_{\mathrm{E}}^2+R^2}} \tag{11}$$

式中 υ 为目标速度。

实际上，由于波束范围限制，可能达不到 90^o。在 $\gamma(t)=0^\circ$ 时，也就是目标垂直穿越波束时有多普勒变化率最大值：

$$\dot{f}_{d\max}=\frac{2R\upsilon^2}{\lambda R_{\mathrm{E}}H} \tag{12}$$

式中 H 为轨道高度。

以 P 波段进行计算，最大多普勒约 25 kHz，最大多普勒变化率约 1 kHz/s，而且变化率恒为负。

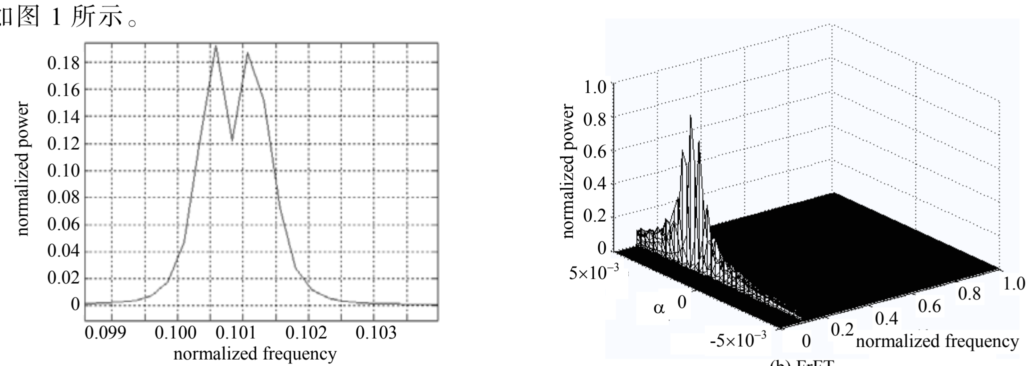
3　目标回波信号检测与参数估计

接收的信号经过波束合成、下变频处理后形成正交数字信号，为保证目标的回波在信号带内，滤波器的最佳带宽与最大多普勒相匹配，再进行数据采样和 FrFT 处理，然后进行信号的检测与频率的估计。

实际应用中采取的都是离散 FrFT 处理，首先需要确定数据采样率 F_s，对数据进行采样。为减少运算量，数据采样率尽可能低。根据 FrFT 的性质，进行旋转后，相当于频率乘了一个因子 $\csc\alpha$，也就是频域范围有一定的增大，主要是变化率引起的频域范围增加。正常情况下 FrFT 处理时需要考虑这个范围的增加，如有的离散方案中使用数据内插将速率提高 1 倍。

在空间目标探测具体应用中，频率变化率是由目标运动引起的，最大变化率出现在多普勒为 0 的时刻，多普勒最大时多普勒变化率最小。选取采样率时刻只考虑最大多普勒影响，可选为 2 倍的最大多普勒频率。

采样率确定后，根据目标穿越波束时间为 T 确定采样点数 $N=F_\mathrm{s}\cdot T$。这样既保证足够的能量聚集时间，也不增加运算量。例如回波信号最大多普勒为 25 kHz，最大多普勒变化率 1 kHz/s，目标穿越波束时间约 90 ms，以 50 kHz 的速率进行采样，为便于 FFT 运算，采样点数 4 096 点，采样时间 81.92 ms。用 FFT 和 FrFT 得到的仿真结果分别如图 1 所示。



(a) FFT　　(b) FrFT

Fig.1 Echo analysis using FFT and FrFT

图1　回波信号的 FFT 和 FrFT 分析

若采取 FFT 进行谱分析，频率分辨率为 12 Hz，而在 81.92 ms 多普勒变化率导致多普勒产生 81.9 Hz，跨越 7 个谱线，信号能量分散，峰值功率下降达 7 dB，在低信噪比下不能完成信号检测。

而采取 FrFT 进行时频分析，在对应的旋转角上实现信号能量的聚集，可以完成信号的检测。

由于频率变化率基本为负数，α 的取值范围为 $[\pi/2-\Delta\alpha_{\max},\pi/2]$，由式(6)可得：

$$\cot(\pi/2-\Delta\alpha_{\max})=\frac{N|\mu|_{\max}}{F_\mathrm{s}^{\ 2}} \tag{13}$$

则有 $\Delta\alpha_{\max}=0.0016$。在空间目标探测中，多普勒变化率相对较小，而且积分时间有限，$\Delta\alpha_{\max}$ 很小，则式(6)可变为：

$$\begin{cases}\hat{\mu}=\dfrac{F_\mathrm{s}^{\ 2}}{N}(\hat{\alpha}_0-\dfrac{\pi}{2})\\ \hat{f}=\hat{u}_0\end{cases} \tag{14}$$

旋转角α步长需要考虑检测概率、参数估计精度和运算量等因素。对1个α值计算FrFT，需要2次FFT和1次IFFT运算，运算量为$3N\log_2 N$，完成整个范围的扫描需要$\dot{f}d_{\max}/\alpha_{\mathrm{step}}$次计算。为满足参数估计精度要求，必须选择较小的扫描步长，将成倍增加计算复杂度。而扫描步长过大，旋转角α与多普勒变化率匹配较差，则能量聚集效果降低，影响检测概率。因此需要合理设计扫描步长。引入1个频率变化率值$\Delta\mu = F_s^2/N^2$，这个变化率经N点采样后引起频率的变化正好等于频率分辨率(F_s/N)，此时对应的$\Delta\alpha = 1/N$。通过仿真分析，不同的步长对能量聚集以及频率估计的影响，如表1所示。表中对频率误差进行归一化处理，其值为频率误差除以频率分辨率。

表1 扫描步长对FrFT检测与频率估计的影响

Table1 Effect of scan step on detection and frequency estimation using FrFT

scan step	$2\Delta\alpha$	$1.5\Delta\alpha$	$\Delta\alpha$	$\Delta\alpha/2$	$\Delta\alpha/4$
maximum power loss/dB	4.00	1.50	1.00	0.37	0.25
maximum frequency error	0.50	0.30	0.25	0.14	0.08

综合考虑检测概率和运算量，选择步长为$\Delta\alpha$较为合适，其最大能量损失1 dB；如果再减小步长，运算量成倍增加，而检测概率改善较小。对于1 kHz/s的变化率，扫描7次可以完成。使用高速DSP或FPGA器件可以保证检测实时性。

在空间目标探测中，由于多普勒变化率不是很大，避免了FrFT的运算量极大的问题，工程实现可行。

4 提高频率估计精度的方法

空间目标探测中，1个重要的指标是多普勒估计精度，而对多普勒变化率精度要求不高。在不考虑噪声的影响下，由于量化误差，由式(4)FrFT估计出来的多普勒最大误差为$F_s/2N$，其精度不能满足要求。FrFT可以改为按下式进行计算：

$$X_p(m) = \frac{A_\alpha}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi(n^2\cot\alpha - 2mn\csc\alpha + m^2\cot\alpha)/N} x(n) \tag{15}$$

式(4)与式(15)两式计算结果有一定差别，式(4)得到的频率为中间时刻的频率值或频率均值，而式(15)得到的频率为初始频率值，需要再加上变化率引起的频率变化才得到频率均值。

在FrFT处理分析中，为提高检测概率，将扫描步长设置为$\Delta\alpha$，相当于两次扫描之间将信号频率搬移了$F_s/2N$，一方面减小了检测能量的损失，还可将频率估计精度提高1倍，最大估计误差变为$F_s/4N$。

在低信噪比下，采取数值计算的方法难以改善估计精度，可采用插值法进行最大似然估计，以进一步提高估计精度。FrFT的插值常是通过减小α的步长完成，实际上u值已初步估计，再进行完整的FrFT计算完全没有必要。FrFT计算得到的u值一般为整数，可在u域进行小数插值，提高频率估计精度，而且运算量小，1次插值只需N点的乘累加就能实现。

5 检测性能分析

在空间目标检测中，首先需要保证足够低的虚警率，一般选择在10^{-5}以下。为保证90%以上的检测概率，要求检测信噪比达到12.5 dB以上[8]。4 096点FrFT时频分析处理增益为36 dB，考虑0.5 dB的损失，要求输入信噪比达到−23 dB。而采取WVD分析，尽管计算量小，由于式中包含信号延迟相乘运算，对于负信噪比信号恶化较大，则要求输入信噪比达到−11.5 dB。

在没有噪声情况下，由于离散特性，FFT的检测误差在$[-F_s/2\mathrm{N}, F_s/2\mathrm{N}]$内均匀分布，标准差为$F_s/(2\sqrt{3}N)$。同样，对于FrFT具有类似的特性，采取1倍的$\Delta\alpha$进行扫描，可将误差减小一半，即$F_s/(4\sqrt{3}N)$；如果再采取2点插值，可将误差再减小一半，即$F_s/(8\sqrt{3}N)$。以50 kHz采样率，4 096点计算，误差为0.88 Hz，最大误差为1.52 Hz。理论上只要插值的分辨率足够高，就可接近理论值，但分辨率的提高也带来运算量成倍增加，实际应用中主要根据精度要求确定插值数。

以最大多普勒25 kHz，最大多普勒变化率1 kHz/s，在范围内随机生成初始频率和频率变化率，在不同信噪比下进行1 000次的FrFT仿真，并分别进行2点、4点和8点插值，统计检测概率和测频误差分析，仿真结果见表2。

表2 FrFT仿真分析结果

Table2 Simulation results using FrFT

input SNR/dB	output SNR/dB	detection probability	error/Hz			
			no insert	2 point	4 point	8 point
0	36	1	1.79	0.88	0.45	0.22
-21	15	1	1.98	0.93	0.47	0.27
-22	14	0.996	2.03	0.96	0.49	0.38
-23	13	0.934	2.18	1.09	0.52	0.35
-24	12	0.854	2.25	1.12	0.63	0.46

可见通过 FrFT 可实现目标检测，并保证频率估计精度。

6　结论

FrFT 作为非平稳信号的时频分析工具，能充分利用积分时间改善信噪比，实现空间目标低信噪比下的检测，而且空间目标多普勒变化率也不是特别大，可避免 FrFT 运算量大的问题，有利于工程应用。

参考文献：

[1] Chang C Y,Kwok R,Curlander J C. Spatial Compression of Seasat SAR Imagery[J]. IEEE Transactions Geoscience and Remote Sensing, 1988,26(6):673-685.

[2] 陶然,齐林,王越. 分数阶 Fourier 变换的原理与应用[M]. 北京:清华大学出版社, 2004. (TAO Ran,QI Lin,WANG Yue. Fractional Fourier Transform Theory and Application[M]. Beijing:Tsinghua University Publishing House, 2004.)

[3] Ozaktas H M,Arikan 0,Kutay M A,et al. Digital Computation of the Fractional Fourier Transform[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1996,44(9):2141-2150.

[4] Almeida L B. The Fractional Fourier transform and time-frequency representations[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994,42(11):3084-3091.

[5] Yeh M H,Pei S C. A Method for the Discrete Fractional Fourier Transform Computation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003,51(3):889-891.

[6] Candan C,Ozaktas H M,Kutay M A. The discrete fractional Fourier transform[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2000,48(5):1329-1337.

[7] Ashok V Narayanan,Prabhu K M M. The fractional Fourier transform:theory,implementation and error analysis[J]. Microprocessors and Microsystems, 2003,27(10):511-521.

[8] Merrill I Skolnik. 雷达手册[M]. 2 版. 王军,林强,米慈中,等,译. 北京:电子工业出版社, 2003. (Merrill I Skolnik. Radar Handbook[M]. 2nd ed. Translated by WANG Jun,LIN Qiang,MI Cizhong,et al. Beijing:Publishing House of Electronics Industry, 2003.)

作者简介：

张碧雄(1974-)，男，湖北天门人，学士，高级工程师，主要研究方向为信号处理、测控技术. email:zhangbixiong@sohu.com.