文章编号：1672-2892(2011)06-0759-06

一种欠定盲源分离中混合矩阵的估计方法

张　剑，陈　豪

(中国空间技术研究院　西安分院，陕西　西安　710000)

摘　要：欠定盲源分离问题中基于源信号稀疏性的两阶段法中，混合矩阵估计的准确与否，直接影响源信号的恢复效果。文中提出了一种在稀疏域估计混合矩阵的新方法。该方法通过搜索稀疏域中同一直线附近的点，利用这些点重构出混合矩阵，避免了远离直线周边的点对估计混合矩阵的干扰，从而大大降低了计算量。仿真表明该算法性能良好。

关键词：欠定；两阶段法；混合矩阵估计；稀疏性

中图分类号：TN911.7　　**文献标识码：**A

A new method of mixing matrix estimation in underdetermined blind source separation

ZHANG Jian，CHEN Hao

(Xi’an Division of China Academy of Space Technology，Xi’an Shaanxi 710000，China)

Abstract: This paper focuses on the mixing matrix estimation stage，which is the first stage of the two-stage approach based on the sparse sources in underdetermined blind source separation. In the two-stage approach, the accuracy of estimating the mixing matrix will affect the recovered results to a great degree. A new method is put forward to estimate the mixing matrix in sparse domain. This method can recover the mixing matrix in sparse domain by searching the points next to the same line, thus can avoid the interference of the points far from the same line, and reduce the amount of computation greatly. Simulation results show that the method has a good performance.

Key words: underdetermined；two-stage approach；mixing matrix estimation；sparseness

盲源分离[1]问题从20世纪80年代提出至今，由于其在信号压缩、小波降噪、声音和图像处理、特征提取以及生物医学信号处理等领域的巨大潜在应用价值，一直受到国内外学者的普遍关注。本文只讨论观测信号少于源信号的情形，即考虑 $m<n$ 时的情形，称之为欠定盲源分离。这在实际中会经常遇到，同时也是相比正定和超定盲源分离($m\geqslant n$)更具挑战性的一类问题。由于在欠定情形下，其混合矩阵不可逆，因此不能像在正定和超定情形下通过对混合矩阵求逆的办法来恢复源信号[2]。欠定情形下恢复源信号需要更多的先验信息，很多学者尝试把信号的稀疏性用到欠定盲源分离问题中，并且取得了良好的效果[3-5]。利用稀疏性解决欠定盲源分离问题也是目前普遍采用的处理欠定盲源分离的一种方法。基于信号稀疏性的两阶段法是实现欠定盲分离的一种常用方法，即首先估计出混合矩阵，在混合矩阵估计出来的基础上再恢复源信号。因此，混合矩阵估计的准确程度非常重要，如果混合矩阵估计不出来或者估计得不准确，那么源信号的恢复将受到很大影响，甚至恢复不出源信号。目前，基于势函数的方法、K均值聚类法及基于时频点比率聚类法等统计聚类方法被提出来估计混合矩阵。基于势函数的方法，由于其缺乏一定的理论依据，实现起来比较复杂，主观经验性太强，而且只能用于2个观测信号的情况，有一定局限性。基于K均值聚类等统计聚类算法不但要求源信号的稀疏性很强，而且需要进行优化过程，算法计算量比较大[6-9]。本文主要探讨一种在稀疏域中准确恢复混合矩阵的方法。该方法通过在稀疏域中去除那些远离直线周边的点，而保留直线附近的点，只需要利用这些直线附近的点便可恢复出混合矩阵，无需优化，计算量大大减少，准确性也很高，而且可以应用到3个及以上观测信号的情形。

收稿日期：2010-11-18；**修回日期：**2011-01-18

1 估计混合矩阵

考虑如下无噪声线性混合模型：

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{AS} \tag{1}$$

式中：混合矩阵 $\boldsymbol{A} \in R^{m\times n}$ 是未知的；$\boldsymbol{S} = [s(1), s(2), \cdots, s(T)] \in R^{n\times T}$ 包含n个未知的源信号；$\boldsymbol{X} = [x(1), x(2), \cdots, x(T)] \in R^{m\times T}$ 包含m个观测信号，T是采样时刻，$m < n$。

式(1)也可以写成：

$$\boldsymbol{x}(t) = a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) + \cdots + a_n s_n(t), t = 1, 2, \cdots, T \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{a}_j$ 表示混合矩阵[10]$\boldsymbol{A}$ 的第 j 列，$j = 1, 2, \cdots, n$；$\boldsymbol{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \cdots, s_n(t)]^{\mathrm{T}}$ 是未知源信号在时刻 t 的向量；$\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t)]^{\mathrm{T}}$ 是在 t 时刻的 m 个观测向量。

如果源信号在时域不具有稀疏性或者稀疏性不强，可以通过傅里叶变换、小波变换等将其变换到变换域中，使其在变换域中具有稀疏性。如果源信号满足稀疏特性，那么在绝大多数时刻，只有某个源信号的取值很大，其他源信号取值很小或者接近于0。对于某一采样时刻 t_0，假设源信号 $s_j(t_0)$ 取值很大，其他源信号取值很小或接近于0，则式(2)变成如下形式：

$$x(t_0) = a_j s_j(t_0), \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

由式(3)可知，源信号 $s_j(t_0)$ 所有取值占优的采样时刻将确定一条直线，并且直线方向为混合矩阵$\boldsymbol{A}$的第j个列向量 $\boldsymbol{a}_j$。

为了便于分析，首先将观测信号在稀疏域中进行标准化，包括归一化和对称化。文中仿真实验所用6个长笛声音信号，由于其在频域中具有稀疏性，因此将频域作为分析域。假设有两路观测信号，则观测信号可以看成是二维平面上的一些坐标点，如图1中左图所示。与混合矩阵的列向量方向相同的观测数据主要分布于二维平面上的同一直线上，如图1中右图所示。将这些直线归一化到二维平面的同一个单位圆上，如图2(a)所示。为了统一直线方向，便于后面计算，将二维平面上下半圆上的点关于原点对称到上半圆上，如图2(b)所示。对于任意1个观测信号 $\boldsymbol{X}(k) = [X_1(k), X_2(k)],\ \ k = 1, 2, \cdots, T$，其标准化后的信号 $\boldsymbol{X}\_bzh(k)$ 为：

$$\boldsymbol{X}\_bzh(k) = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{X}(k)}{\left\|\boldsymbol{X}(k)\right\|}, & X_2(k) \geqslant 0 \\ -\dfrac{\boldsymbol{X}(k)}{\left\|\boldsymbol{X}(k)\right\|}, & X_2(k) < 0 \end{cases} \qquad k = 1, 2, \cdots, T \tag{4}$$

然后对标准化后的信号 $\boldsymbol{X}\_bzh(k)$，将其相邻的列向量进行如下运算：

$$\begin{cases} M(1) = \boldsymbol{X}\_bzh(1) \\ M(k+1) = \boldsymbol{X}\_bzh(k+1) - \boldsymbol{X}\_bzh(k), & k = 1, 2, \cdots, T-1 \end{cases} \tag{5}$$

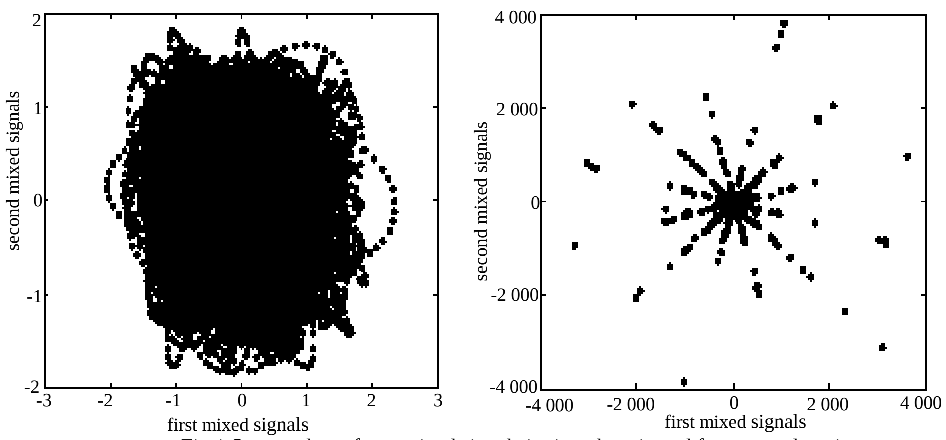

Fig.1 Scatter plots of two mixed signals in time domain and frequency domain

图 1 两路观测信号时域及频域散点图

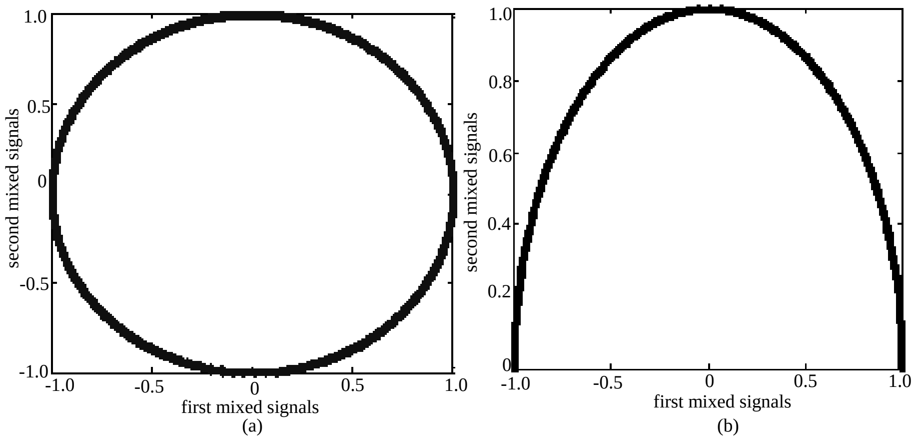

Fig.2 Unitary (a) and symmetrical (b) scatter plots of the mixed signals
图 2 观测数据归一化后(a)和对称化后(b)的散点图

经过式(5)运算得到了矩阵 $\boldsymbol{M}=[M(1),M(2),\cdots,M(T)]_{2\times T}$ ，从式(5)可以看出，如果观测信号的2个列向量 $\boldsymbol{X}\_bzh(k+1)$ 和 $\boldsymbol{X}\_bzh(k)$ 位于同一直线附近时， $M(k+1)$ 将接近于0。因此，如果有连续多个观测信号的列向量都位于同一直线附近，那么矩阵$\boldsymbol{M}$中将出现连续多个接近于0的列。形如

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\cdots & * & * & \cdots & * & \otimes & \otimes & * & \cdots & * & \otimes & * & \cdots & * & \cdots\\ \cdots & * & * & \cdots & * & \otimes & \otimes & * & \cdots & * & \otimes & * & \cdots & * & \cdots\end{bmatrix}_{2\times T} \tag{6}$$

式中：$*$表示接近于0的数；$\otimes$表示远大于0的数。

通过搜索矩阵$\boldsymbol{M}$中连续的接近于0的列向量，只利用这些列向量便可以重构出混合矩阵。这样，避免了那些远离直线周边的点对混合矩阵估计过程的干扰，使得算法简单、快速、准确。该算法中，设定参数 $\varDelta$ 来判断$\boldsymbol{M}$中的列向量是否接近于0，如果 $\sum\limits_{i=1}^{2}\left|M_i(k)\right|<\varDelta$， $k=1,2,\cdots,T$ ，则认为$\boldsymbol{M}$中的第k列接近于0。如果 $\sum\limits_{i=1}^{2}\left|M_i(k)\right|\geqslant\varDelta$，$k=1,2,\cdots,T$ ，则认为$\boldsymbol{M}$中的第k列远大于0。选择参数 ζ 作为分块数，比如令 $\zeta=10$，则搜索$\boldsymbol{M}$中所有连续10个都小于 $\varDelta$ 的列，符合条件的可能总共有k块，然后用这k块数据根据 $\hat{\boldsymbol{a}}_j=\dfrac{1}{\zeta}\sum\limits_{i=1}^{\zeta}\boldsymbol{X}\_bzh(i),\quad j=1,2,\cdots,k$ ，分别估计出k个混合矩阵的列向量。将这k个混合矩阵的估计分成n类，然后计算每1类的均值，得到混合矩阵每1列的估计。

混合矩阵估计的算法步骤：

1) 选择合适的分析域(时域、频域或小波域)，仿真中6个源信号在频域较稀疏，因此，该文中仿真实验选择频域作为分析域；

2) 在频域中对观测数据进行标准化，包括归一化和对称化；

3) 通过标准化后的数据计算出矩阵$\boldsymbol{M}$；

4) 设定参数 $\varDelta$ 和 ζ ，在$\boldsymbol{M}$中搜索出符合参数要求的k块列向量，每块 ζ 个列向量；

5) 按照公式 $\hat{\boldsymbol{a}}_j=\dfrac{1}{\zeta}\sum\limits_{i=1}^{\zeta}\boldsymbol{X}\_bzh(i),\quad j=1,2,\cdots,k$ ，计算出k个混合矩阵列向量的估计 $\hat{\boldsymbol{a}}_j$；

6) 将这k个混合矩阵的估计分成n类，然后计算每1类的均值得到混合矩阵每1列的估计。

2　仿真实验

和文献[5]中一样，选用6个长笛声音信号作为源信号，6个长笛声音信号来自http://personals.ac.upc.edu。采样率为44 100 Hz，抽取样本58 490个。6个长笛信号的时域及频域波形如图3所示。

则混合矩阵$\boldsymbol{A}$取为2×6阶的矩阵。为便于比较，混合矩阵的选取和文献[5]中所选的一样，混合矩阵取为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.7071 & 0.9659 & 0.2588 & 0.9659 & 0.7071 & 0.2588\\ 0.7071 & 0.2588 & -0.9659 & -0.2588 & -0.7071 & 0.9659\end{bmatrix} \tag{7}$$

6个源信号经过混合矩阵$\boldsymbol{A}$混合之后，变成了2路观测信号，如图4所示。

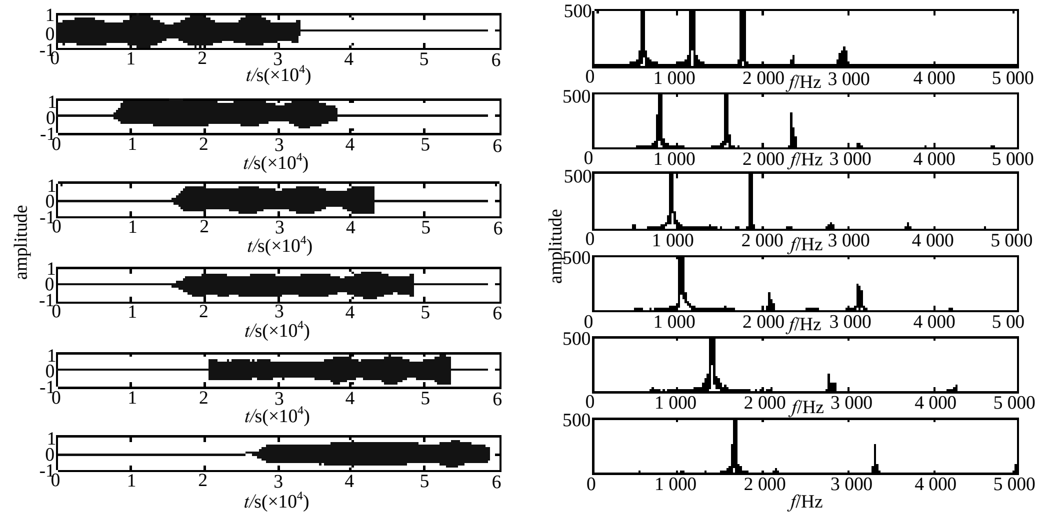

Fig.3 Waveforms of six source signals in time domain and frequency domain
图 3 六个源信号时域和频域波形图

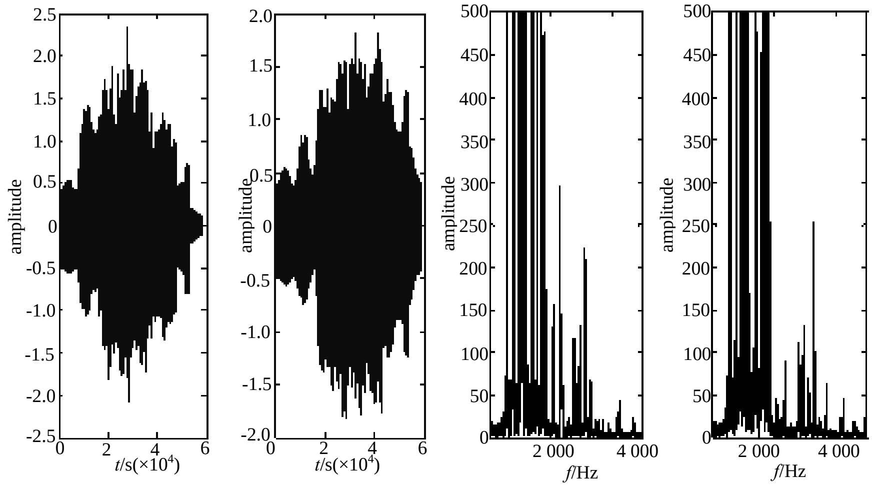

Fig.4 Waveforms of two mixed signals in time domain and frequency domain
图4 两路观测信号时域及频域波形图

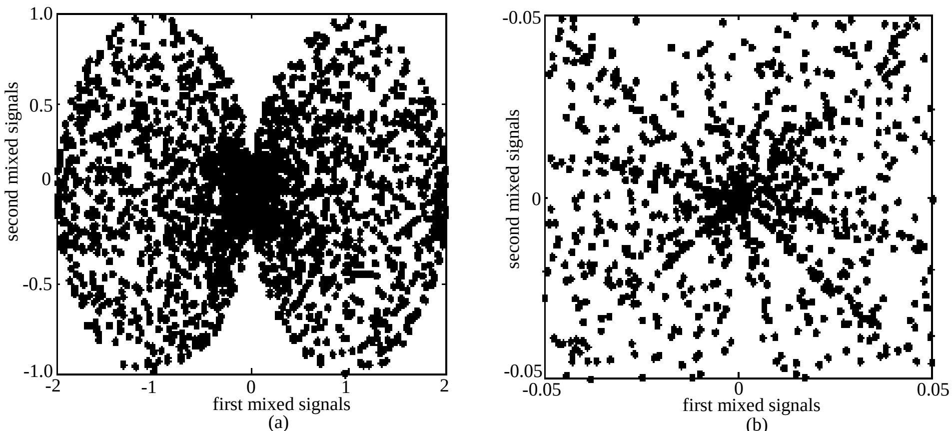

Fig.5 Scatter plot of the data in matrix $\boldsymbol{M}$ (a) and close to zero data in matrix $\boldsymbol{M}$ (b)
图 5 矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的数据散点图(a)和 $\boldsymbol{M}$ 中接近于零的数据散点图(b)

从图5(a)中可以看出，观测数据在频域中经过标准化之后，其按列相减的结果是$\boldsymbol{M}$中大部分的值都集中在0附近，通过观察，可以看出$\boldsymbol{M}$中0附近的点依旧具有明显的直线特征，如图5(b)中所示。进一步说明通过$\boldsymbol{M}$中接近于0附近的点可以恢复出混合矩阵的6个列向量，也就是说可以估计出混合矩阵。通过该文提出算法得到的混合矩阵$\boldsymbol{A}$的估计矩阵为：

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}0.7071 & 0.9658 & -0.2557 & -0.9659 & -0.7069 & 0.2581\\ 0.7071 & 0.2593 & 0.9667 & 0.2586 & 0.7073 & 0.9661\end{bmatrix} \tag{8}$$

通过K均值聚类算法[4]得到的估计矩阵：

$$\hat{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}0.7317 & 0.9775 & 0.2464 & 0.9095 & 0.6269 & 0.2419\\ 0.6594 & 0.1341 & -0.9601 & -0.3892 & -0.7683 & 0.9582\end{bmatrix} \tag{9}$$

文献[5]中通过 K-PCA(Principal Component Analysis)算法得到的估计矩阵：

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}0.7072 & 0.9664 & 0.2542 & 0.9656 & 0.7059 & 0.2592\\ 0.7070 & 0.2569 & -0.9672 & -0.2601 & -0.7084 & 0.9658\end{bmatrix} \tag{10}$$

为了衡量文中所提混合矩阵估计算法的有效性，利用估计的混合矩阵和原混合矩阵对应的列向量之间的夹角来衡量混合矩阵列向量的估计误差：

$$ang\left(\boldsymbol{a},\hat{\boldsymbol{a}}\right)=\frac{180}{\pi}\arccos\left\{\frac{\left\langle \boldsymbol{a},\hat{\boldsymbol{a}}\right\rangle}{\left\|\boldsymbol{a}\right\|\cdot\left\|\hat{\boldsymbol{a}}\right\|}\right\} \tag{11}$$

式中：$\boldsymbol{a}$表示原混合矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量；$\hat{\boldsymbol{a}}$表示在估计混合矩阵中与$\boldsymbol{a}$对应的列向量。

表 1 估计的混合矩阵与原混合矩阵列向量角度偏差的对比表

Table1 Angle differences of the column vectors between the recovered matrix and source matrix

method of mixing matrix estimation	angle difference of the column vectors between the recovered matrix and source matrix					
	$ang(a_1,\hat{a}_1)$	$ang(a_2,\hat{a}_2)$	$ang(a_3,\hat{a}_3)$	$ang(a_4,\hat{a}_4)$	$ang(a_5,\hat{a}_5)$	$ang(a_6,\hat{a}_6)$
K-means cluster	2.975 2	7.187 9	0.605 6	8.168 1	5.787 0	0.830 9
K-PCA	0.008 1	0.112 6	0.273 8	0.076 4	0.101 3	0.023 6
proposed method	0.000 9	0.032 2	0.181 4	0.010 1	0.018 8	0.044 4

从表 1 中可以看出，相比常规 K 均值聚类算法，以及文献[5]中所提出的 K-PCA 算法，本文算法估计的混合矩阵与原混合矩阵列向量之间的角度偏差最小，性能更加优越。

根据所提混合矩阵估计算法估计出的混合矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}0.7071 & 0.9658 & -0.2557 & -0.9659 & -0.7069 & 0.2581\\ 0.7071 & 0.2593 & 0.9667 & 0.2586 & 0.7073 & 0.9661\end{bmatrix}$，采用线性规划算法[5]恢复出的6个长笛声音信号见图6。

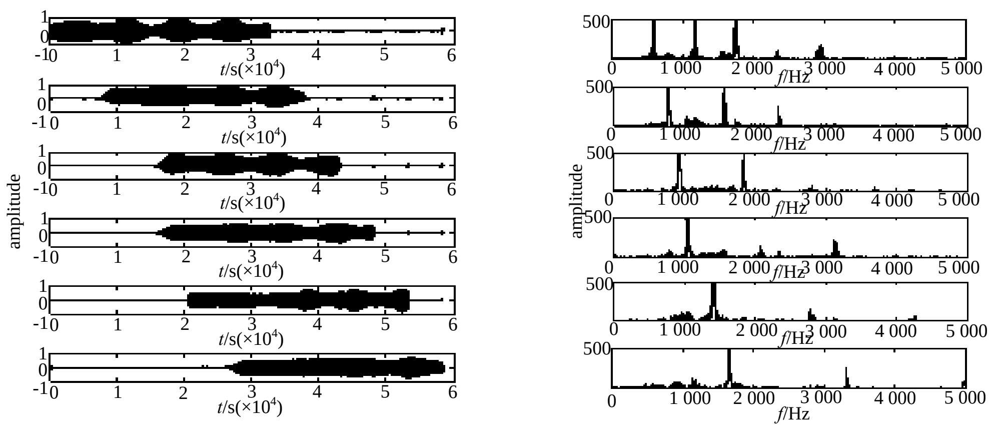

Fig.6 Waveforms of six recovered signals in time domain and frequency domain

图 6 六个恢复信号时域和频域波形图

通过相似系数来衡量恢复信号与源信号之间的差距。相似系数定义为：

$$\xi_{ij}=\xi(y_i,s_j)=\frac{\left|\sum_{t=1}^{N} y_i(t)s_j(t)\right|}{\sqrt{\sum_{t=1}^{N} y_i^2(t)\sum_{t=1}^{N} s_j^2(t)}} \tag{12}$$

式中：当 $y_i=ls_j$ (l为常数)时，$\xi_{ij}=1$；当 y_i 与 s_j 相互独立时，$\xi_{ij}=0$。

当由相似系数构成的相似系数矩阵每行每列都有且仅有1个元素接近于1，其他元素都接近于0时，则可以认为算法分离效果较为理想。该文中通过线性规划优化算法之后得到的相似系数矩阵为：

$$\xi = \begin{bmatrix} \underline{0.9959} & 0.0117 & 0.0009 & 0.0004 & 0.0004 & 0.0086 \\ 0.0151 & \underline{0.9954} & 0.0007 & 0.0153 & 0.0011 & 0.0019 \\ 0.0023 & 0 & \underline{0.9967} & 0.0002 & 0.0065 & 0.0039 \\ 0.0031 & 0.0097 & 0.0002 & \underline{0.9964} & 0.0109 & 0.0004 \\ 0.0006 & 0.0013 & 0.0128 & 0.0122 & \underline{0.9961} & 0.0004 \\ 0.0141 & 0.0008 & 0.0091 & 0.0010 & 0.0007 & \underline{0.9966} \end{bmatrix} \tag{13}$$

通过相似系数矩阵能清晰地看到源信号得到很好恢复，再次说明混合矩阵估计算法估计出的混合矩阵较精确。

3 结论

该文针对两阶段欠定盲分离中混合矩阵估计阶段，混合矩阵估计准确性的重要性，提出了一种新的混合矩阵估计算法。文中阐述了所提算法在估计混合矩阵时的具体步骤，对算法进行了仿真，并将估计结果与通过K均值估计算法以及文献[5]中所提的K-PCA估计算法所得结果进行比较，结果表明本算法不仅相对简单，无需优化，计算量小，而且准确性很好。但是，值得提出的是，本算法同样对源信号的稀疏性要求很高，如果源信号不够稀疏，算法的估计效果将会受到较大影响。

参考文献：

[1] 张贤达,保铮. 盲信号分离[J]. 电子学报, 2001,29(12):1766-1771. (ZHANG Xianda,BAO Zheng. Blind Source Separation[J]. Acta Electronica Sinica, 2001,29(12):1766-1771.)

[2] 程娇,王晓凯,李 锋. 独立分量分析可调速率相对梯度算法[J]. 信息与电子工程, 2010,8(2):207-210. (CHENG Jiao, WANG Xiaokai,LI Feng. Adjustable rate algorithm with relative gradient of ICA[J]. Information and Electronic Engineering, 2010,8(2):207-210.)

[3] Bofill P,Zibulevsky M. Underdetermined blind source separation using sparse representations[J]. Signal Process, 2001, 81:2353-2362.

[4] LI Y Q,Amari S,Cichocki A. Underdetermined Blind Source Separation Based on Sparse Representation[J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 2006,54(2):423-437.

[5] LI Yuanqing,Andrzej Cichocki,Amaris Shun-ichi. Analysis of sparse representation and blind source separation[J]. Neural Comput, 2004,16(6):1193-1234.

[6] 孙吉贵,刘杰,赵连宇. 聚类算法研究[J]. Journal of Software, 2008,19(1):48-61. (SUN Jigui,LIU Jie,ZHAO Lianyu. Clustering Algorithms Research[J]. Journal of Software, 2008,19(1):48-61.)

[7] 何昭水,谢胜利,傅予力. 稀疏表示与病态混叠盲分离[J]. 中国科学E辑, 2006,36(8):864-879. (HE Zhaoshui, XIE Shengli,FU Yuli. Sparse Representation And Ill-mixed Blind Source Separation[J] .Science in China(Series E), 2006, 36(8):864-879.)

[8] 邱天爽,毕晓辉. 稀疏分量分析在欠定盲源分离问题中的研究进展及应用[J]. 信号处理, 2008,24(6):966-970. (QIU Tianshuang,BI Xiaohui. Spares Component Analysis and Application for Underdetermined Blind Source Separation[J]. Signal Processing, 2008,24(6):966-970.)

[9] Pearlmutter B A,Potluru V K. Sparse separation:Principles and tricks[J]. Proc. SPIE. Independent Component Analyses, Wavelets,and Neural Networks, 2003,5102:1-4.

[10] 肖明,谢胜利,傅予力. 欠定情形下语音信号盲分离的时域检索平均法[J]. 中国科学 E 辑, 2007,37(12):1564-1575.

作者简介：

张 剑(1984-)，男，陕西富县人，在读硕士研究生，主要研究方向为空间通信技术、盲信号处理.email:hi_ricky@126.com.

陈 豪(1944-)，男，上海人，博士生导师，研究员，享受政府特殊津贴专家，主要研究方向为卫星通信技术、通信信号处理等.