

文章编号: 2095-4980(2015)01-0130-06

一种稳健的稀疏 Capon 波束形成算法

蒋曦曦, 吴 瑛

(信息工程大学 信息工程学院, 河南 郑州 450002)

摘要: 常规 Capon 波束形成算法具有相对较高的旁瓣增益, 且在期望信号导向矢量存在失配时, 阵列输出性能下降甚至失效。为解决这一问题, 引入了稀疏约束 Capon 波束形成算法, 该算法降低了旁瓣, 对期望信号来向不确定具有一定稳健性, 但在幅相误差、期望信号指向偏差等多种误差同时存在的情况下其性能下降。本文在稀疏约束 Capon 波束形成算法基础上, 给出了一种稳健的稀疏 Capon 波束形成算法。该算法主要是在最差性能最优化的情况下, 在稀疏 Capon 上增加了一个导向矢量存在偏差的约束条件。通过计算机仿真, 验证了新算法在多种误差环境下的有效性与优越性。

关键词: 稳健; 稀疏; Capon 波束; 波束形成

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

doi: 10.11805/TKYDA201501.0130

A sparse robust Capon beamforming algorithm

JIANG Xixi, WU Ying

(Information Systems Engineering, Information Engineering University, Zhengzhou Henan 450002, China)

Abstract: Conventional Capon beamforming algorithm has relatively high sidelobe gain. The array output performance will degrade or even become invalid when there is a mismatch in the desired signal steering vector. To solve this problem, a sparse constraint Capon beamforming algorithm is proposed. The algorithm can reduce the sidelobe, and bears robustness of the desired signal uncertainty; whereas its performance will degrade when dealing with the complicated situations in which the array amplitude errors, phase errors, and desired-orientation errors exist simultaneously. A novel sparse robust Capon beamforming algorithm is put forward in this paper. It adds a deviation steering vector to the sparse Capon under worst-case performance optimization. Simulation results demonstrate the validity and superiority of this proposed algorithm.

Key words: robustness; sparse; Capon; beamforming

自适应波束形成技术作为阵列信号处理的一个重要组成部分, 已广泛应用于雷达、声纳、无线通信、地震监测等众多领域。由于线阵只能提供 180° 的方位角, 大大限制了其使用范围, 而圆形阵列却能提供 360° 全方位的方位角信息, 但圆形阵列具有相对主瓣较高的旁瓣电平。在环境噪声水平较高的情况下, 大量噪声将通过旁瓣方向进入阵列中, 导致输出信干噪比(Signal-to-Interference-and-Noise Ratio, SINR)性能降低。鄢社锋^[1]等人给出了最低旁瓣波束形成器, 并利用二阶锥规划求解; LIU^[2]等人通过二阶锥规划设计窄带旁瓣自适应波束形成算法等, 这些方法可以实现阵列的低旁瓣。

目前信号的稀疏表示能在一定程度上自然贴近信号的本质特性, 因此受到了广泛的关注与应用。研究表明, 阵列波束增益满足稀疏分布的条件, 即阵列波束增益主要集中在主瓣区域, 而主瓣之外的区域增益尽量低。文献[3]提出一种基于稀疏约束的最小方差无失真响应算法, 该算法通过增加波束稀疏约束, 使较大的增益集中在主瓣区域, 而尽量抑制旁瓣增益。该算法对阵列旁瓣抑制和阵列输出性能有一定的提升, 尤其对强干扰和有限样本的情况, 显示了良好的阵列输出性能。文献[4-5]提出了一种总体方差最小的波束稀疏约束的 Capon 波束形成算法, 该算法根据旁瓣区域已知的先验信息, 对旁瓣区域更大的稀疏惩罚约束, 显示了更好的抑制性能。文献[6]通过波束形成器的一个简单的相关运算获得干扰噪声能量在角度上的粗略后验分布, 利用这个分布向量在不同方

向上加权,进一步提高稀疏约束波束形成算法的性能。文献[7]利用 ℓ_p 范数中 p 取值的不同数学意义,根据已知的主瓣和旁瓣区域信息,给出了 ℓ_∞ 范数和 ℓ_1 范数的混合范数稀疏约束的 Capon 波束形成算法,该算法尽可能提高主瓣阵列增益,抑制旁瓣增益。文献[8]通过最大化主瓣和旁瓣阵列增益比,给出了主瓣旁瓣能量比最大化稀疏约束 Capon 波束形成,相较于上述算法可以更加有效地提高阵列的输出性能。这类算法的主要思想是限制波束图中阵列增益较大元素的个数,同时鼓励较大的阵列增益集中在主波束主瓣中,从而达到降低旁瓣水平的同时,提高主瓣中阵列增益水平。算法通过引入稀疏约束,很大程度上减小了角度失配和低快拍等对 Capon 波束形成算法的影响。

基于旁瓣抑制的稀疏约束的 Capon 波束形成算法可以扩展到盲波束形成算法中,其主要思想除利用信号自身的特性,如循环平稳特性、恒模性等,提取期望信号而抑制干扰信号,同时增加稀疏约束提升算法性能。文献[9]给出了一种谱自相关恢复的盲波束形成算法;文献[10]给出了一种稀疏约束的最小二乘恒模算法(Sparse Least Square Constant Modulus Algorithm, SLSCMA);文献[11]给出了一种稳健的稀疏约束最小二乘恒模算法,其主要是在 SLSCMA 算法的基础上增加期望信号导向矢量约束,确保低信噪比下算法能正确收敛于期望信号。上述算法在有限样本快拍条件下,相较于对传统的盲波束算法显示了良好的旁瓣抑制能力以及更好的阵列输出性能,但是较传统的盲波束形成算法增加了阵列流形信息的先验信息,且计算复杂度较大。

稀疏 Capon 波束虽然对期望指向误差等具有一定的稳健性,但较大导向矢量失配时,算法存在一定程度上的性能下降。为解决这一问题,本文针对阵列幅相误差、期望指向误差等多种误差条件,给出了一种稳健的稀疏 Capon 波束形成算法。该算法主要是在最差性能最优化的情况下,在稀疏 Capon 上增加了一个导向矢量存在偏差的约束条件,该问题可通过凸优化进行求解。该算法在低快拍数具有较好的性能,且对阵列模型误差和期望信号指向误差等多种误差同时存在情况下具有一定的稳健性。

1 阵列模型和算法

考虑 M 个全向阵元组成的均匀圆形阵列,现有 D 个远场窄带信号源入射到阵列,其来波方位角和仰角为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_D$, 其中 $\theta_i = (\theta_i, \varphi_i)$, θ_i 和 φ_i 为第 i 个信号对应的方位角和仰角,则阵列输出响应为:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{s}(t)$ 为信源复矢量; $\mathbf{n}(t)$ 为高斯噪声矢量,且与信源统计独立; $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_D)]$ 为阵列流形矩阵, $\mathbf{a}(\theta_i) = [e^{j\omega_0\tau_1}, e^{j\omega_0\tau_2}, \dots, e^{j\omega_0\tau_M}]^T$ 为来向 θ_i 对应的导向矢量,其中 $\tau_i = \frac{r}{c} \cos\left(\theta_i - \frac{2\pi(m-1)}{M}\right) \cos\varphi_i$, ω_0 表示信号角频率, r 表示圆阵半径, c 为信号的光速。

假设噪声是不相关高斯白噪声且期望信号和干扰相互独立,那么数据的协方差矩阵为:

$$\mathbf{R} = \sigma_0^2 \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) + \sum_{i=1}^{D-1} \sigma_i^2 \mathbf{a}(\theta_i) \mathbf{a}^H(\theta_i) + \sigma_n^2 \mathbf{I} \quad (2)$$

式中: σ_0^2 和 $\mathbf{a}(\theta_0)$ 分别为期望信号功率和导向矢量,其余的为干扰; σ_n^2 为噪声功率; \mathbf{I} 为单位阵。实际中采样协方差矩阵 \mathbf{R}_x 通过有限 N 次快拍得到,有 $\hat{\mathbf{R}}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n)$ 。

阵列波束形成器的输出为:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(k) \quad (3)$$

基于阵列最小输出功率,自适应波束形成可写成如下优化问题:

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{i+n} \mathbf{w} \quad s.t. \quad \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1 \quad (4)$$

式中 \mathbf{R}_{i+n} 是干扰噪声协方差矩阵,其在实际中无法获得,一般用 $\hat{\mathbf{R}}_x$ 代替。其波束形成算法的权值为:

$$\mathbf{w} = \frac{\hat{\mathbf{R}}_x^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_0) \hat{\mathbf{R}}_x^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)} \quad (5)$$

实际阵列中,由于存在阵列幅相误差和期望信号波达方向(Direction of Arrival, DOA)估计偏差等,期望信号导向矢量存在失配,导致 Capon 波束形成算法性能下降。同时在有限快拍数下, Capon 波束具有较高的旁瓣,使得阵列性能变差。由于阵列增益具有稀疏特性,可以通过增加稀疏约束,使较大的增益集中在主瓣区域,而尽量

抑制旁瓣增益, 从而提升阵列的稀疏特性。

2 稳健的稀疏波束形成算法

传统的 Capon 波束形成器具有较高的旁瓣, 通过增加波束稀疏约束, 使较大的增益集中在主瓣区域, 而尽量抑制旁瓣增益, 从而可以提升阵列的输出性能。

2.1 稀疏约束 Capon 波束形成

稀疏约束的 Capon 波束优化模型为^[3]:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{w}} \left(\mathbf{w}^H \hat{\mathbf{R}}_x \mathbf{w} + \gamma \|\mathbf{w}^H \mathbf{A}\|_p^p \right) \\ \text{s.t. } \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1 \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_i |\mathbf{x}_i|^p \right)^{1/p}$ 表示向量 \mathbf{x} 的 ℓ_p 范数, ℓ_p 范数可以理解为信号成分的多样性测度; γ 为最小方差约束项和稀疏约束项之间的加权因子; \mathbf{A} 为 $M \times K$ 维矩阵, 表示 K 个 $M \times 1$ 维的导向矢量组成的阵列流形矩阵(包括所有可能的干扰)。

特别的, 当 $p=1$ 时, 式(6)问题是凸优化问题, 可以通过 MATLAB 中 CVX 软件求解; $0 \leq p < 1$ 时, 该问题为非凸优化问题, 不能确保收敛于期望解, 需要选择合适迭代初始值; 当 $p=2$ 时, 能够直接得到形式简单的解析解, 不需要迭代, 具有更小的计算复杂度。

该问题通过迭代算法求解^[1], 利用 Lagrange 乘子 λ , 其代价函数为:

$$J(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^H \hat{\mathbf{R}}_x \mathbf{w} + \gamma \|\mathbf{w}^H \mathbf{A}\|_p^p + \lambda (\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) - 1) \quad (7)$$

式中: $\bar{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} | \alpha \mathbf{a}(\theta_0)]$; $\mathbf{d} = [\mathbf{0} | \alpha \mathbf{1}]$, $\alpha = \lambda / \gamma$ 。

上式可转化为:

$$J(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^H \hat{\mathbf{R}}_x \mathbf{w} + \gamma \|\bar{\mathbf{A}}^H \mathbf{w} - \mathbf{d}^*\|_p^p \quad (8)$$

对 \mathbf{w} 求偏导得:

$$\nabla_{\mathbf{w}} J(\mathbf{w}) = 2\hat{\mathbf{R}}_x \mathbf{w} + \gamma^* \bar{\mathbf{A}} \Pi(\mathbf{w}) (\bar{\mathbf{A}}^H \mathbf{w} - \mathbf{d}^*) \quad (9)$$

式中: $\gamma^* = \gamma p$; $\Pi(\mathbf{w}) = \text{diag} \left\{ \left| (\bar{\mathbf{A}}^H \mathbf{w} - \mathbf{d}^*)_1 \right|^{p-2}, \left| (\bar{\mathbf{A}}^H \mathbf{w} - \mathbf{d}^*)_2 \right|^{p-2}, \dots, \left| (\bar{\mathbf{A}}^H \mathbf{w} - \mathbf{d}^*)_K \right|^{p-2} \right\}$, $(\bar{\mathbf{A}}^H \mathbf{w} - \mathbf{d}^*)_i$ 表示 $(\bar{\mathbf{A}}^H \mathbf{w} - \mathbf{d}^*)$ 的第 i 个元素。

可得迭代权向量更新公式为:

$$\mathbf{w}(i+1) = \gamma^* \left(2\hat{\mathbf{R}}_x + \gamma^* \bar{\mathbf{A}} \Pi(\mathbf{w}(i)) \bar{\mathbf{A}}^H \right)^{-1} \bar{\mathbf{A}}^H \Pi(\mathbf{w}(i)) \mathbf{d}^* \quad (10)$$

式中 i 是迭代因子。计算 Lagrange 乘子 λ 是一个复杂的过程, 在 $0 \leq p < 1$ 一般通过经验选取 λ 。为简化算法, 一般取 $p=1$ 。

上述稀疏约束的 Capon 波束对期望信号 DOA 失配等引起的导向矢量偏差具有一定的稳健性, 但同时存在阵列模型及 DOA 偏差等引起的较大期望信号导向矢量失配时, 稀疏 Capon 波束算法性能下降。

2.2 稳健的稀疏约束 Capon 波束

在实际阵列中, 多种阵列误差的存在, 使得导向矢量存在较大的失配。

根据期望信号 DOA 及阵列结构, 可粗估计期望信号导向矢量 $\bar{\mathbf{a}}$, 假设期望信号导向矢量偏差 \mathbf{e} 的范数小于某个常数 ε , 有 $\|\mathbf{e}\| \leq \varepsilon$, 实际期望信号导向矢量属于如下球形集合, 有

$$\mathbf{C}(\varepsilon) = \{ \mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{e}, \|\mathbf{e}\| \leq \varepsilon \} \quad (11)$$

为同时兼顾阵列的稳健性与稀疏特性, 结合文献[12], 给出了如下的最差性能下的稀疏 Capon 波束优化模型

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{w}} \left(\mathbf{w}^H \hat{\mathbf{R}}_x \mathbf{w} + \gamma \|\mathbf{w}^H \mathbf{A}\|_p^p \right) \\ \text{s.t. } \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) \geq \varepsilon \|\mathbf{w}\| + 1 \end{cases} \quad (12)$$

对上式问题用 Lagrange 乘子进行求解，代价函数为：

$$J(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} + \gamma \|\mathbf{w}^H \mathbf{A}\|_p^p + \lambda (\varepsilon^2 \mathbf{w}^H \mathbf{w} - \mathbf{w}^H \mathbf{a} \mathbf{a}^H \mathbf{w} + \mathbf{w}^H \mathbf{a} + \mathbf{a}^H \mathbf{w} - 1) \quad (13)$$

上式对 \mathbf{w} 求偏导可得：

$$\nabla_{\mathbf{w}} J(\mathbf{w}) = 2\hat{\mathbf{R}}_x \mathbf{w} + \gamma p \mathbf{A} \Pi(\mathbf{w}) (\mathbf{A}^H \mathbf{w}) + \lambda (\varepsilon^2 \mathbf{w} - \mathbf{a} \mathbf{a}^H \mathbf{w} + \mathbf{a}) \quad (14)$$

式中 $\Pi(\mathbf{w}) = \text{diag} \left\{ \left| (\mathbf{A}^H \mathbf{w})_1 \right|^{p-2}, \left| (\mathbf{A}^H \mathbf{w})_2 \right|^{p-2}, \dots, \left| (\mathbf{A}^H \mathbf{w})_K \right|^{p-2} \right\}$ 。

令上式等于 0，可得更新 \mathbf{w} ：

$$\mathbf{w}(i+1) = -\left(2\hat{\mathbf{R}}_x + \gamma p \mathbf{A} \Pi(\mathbf{w}(i)) \mathbf{A}^H + \lambda \varepsilon^2 \mathbf{I} - \lambda \mathbf{a} \mathbf{a}^H \right)^{-1} \lambda \mathbf{a} \quad (15)$$

这里计算 Lagrange 乘子 λ 同样是一个复杂的过程，为减小计算量，选取 $p=1$ ，使得式(7)的优化模型可通过凸优化 CVX 工具箱求解。

本文算法利用了信号的稀疏特性，并考虑了算法的稳健性，在两者之间找到合适的平衡，从而使得算法性能总体最优。但仍存在一些不足，如主瓣展宽，导致 DOA 响应变胖，使得 DOA 存在模糊；导向矢量误差与误差矢量约束参数有关，不合适的约束参数可能会导致算法性能的下降。

3 性能仿真

为进一步验证所提算法的性能，对算法进行计算机仿真。阵列条件：9 阵元圆形阵，采样频率 80 kHz，天线阵孔径比为 1.5，期望信号来向为(90°, 30°)(对应信号的方位角和仰角)，2 个干扰信号，其来向为(40°, 30°)和(120°, 30°)。所有的实验结果均由 500 次蒙特卡洛独立实验平均得到。稀疏约束参数取 $\gamma = 0.1, p=1$ ，导向矢量失配误差模上界参数 $\varepsilon = 0.3M$ 。文献[3]中算法为 Sparse-Capon 算法，本文算法为 Sparse_RCB 算法。

实验一：考察期望信号指向(DOA)偏差下算法输出 SINR 性能。阵列条件如上，干扰信号信噪比均为 30 dB，预估计期望信号来向 θ_0 为 93°，即存在 3° 的 DOA 估计偏差。固定期望信号信噪比为 0 dB，快拍数从 20~200 间隔 10 个快拍变化，输出 SINR 随快拍数变化如图 1 所示。固定快拍数为 100，期望信号信噪比为 -10 dB~30 dB 间隔 2 dB 变化，输出 SINR 随信噪比变化如图 2 所示。

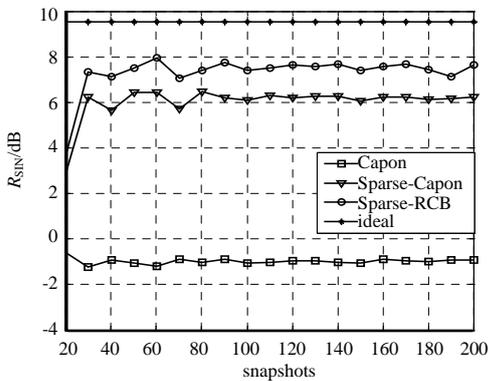


Fig.1 SINR with the change of snapshots
图 1 SINR 随快拍数变化图

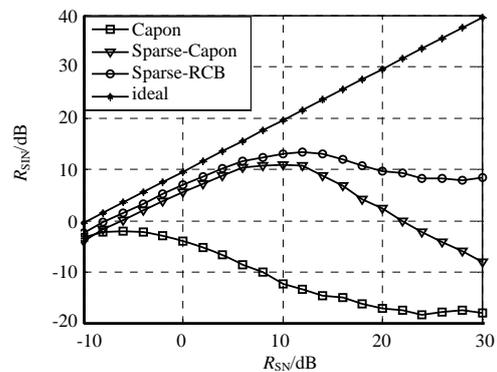


Fig.2 SINR with the change of desired signal SNR
图 2 SINR 随期望信号信噪比变化图

从图 1 和图 2 可以看出，在低快拍数下，稀疏 Capon 波束具有较 Capon 更好的性能，其主要是通过抑制旁瓣提高阵列输出性能，且在存在 DOA 偏差下，稀疏的稳健 Capon 波束形成算法具有较其他算法更好的性能，由于稀疏约束的 Capon 中协方差矩阵含有期望信号成分，使得算法在高信噪比下性能下降。

实验二：考虑阵列模型误差下输出 SINR 性能。阵列条件如上，干扰信号信噪比为 30 dB，快拍数从 20~200 间隔 10 变化。预估计期望信号来向 θ_0 为 93°，即存在 3° 的 DOA 估计偏差。阵列加入 ± 3.0 dB 的幅度误差和 $\pm 30^\circ$ 的相位误差，固定期望信号信噪比为 0 dB，快拍数从 20~200 间隔 10 个快拍变化，输出 SINR 随快拍数变化如图 3 所示。固定快拍数为 100，期望信号信噪比为 -10 dB~30 dB 间隔 2 dB 变化，输出 SINR 随期望信号信噪比变化如图 4 所示。

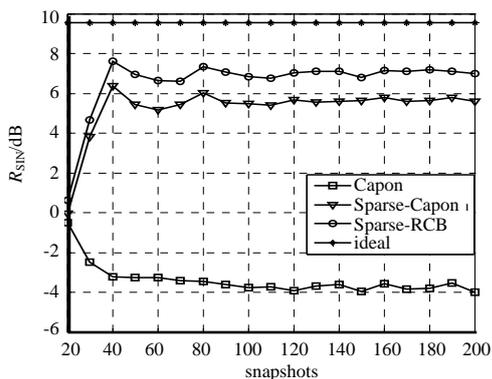


Fig.3 SINR with the change of snapshots
图 3 SINR 随快拍数变化图

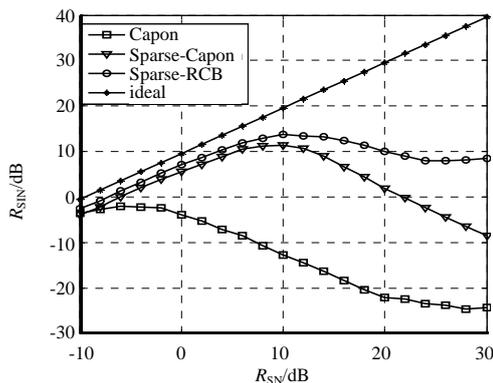


Fig.4 SINR with the change of desired signal SNR
图 4 SINR 随期望信号信噪比变化图

从图 3 可以看出,随着拍数的增加,稀疏 Capon 波束形成算法与 Sparse-RCB 算法性能随之提升,稀疏 Capon 算法在较低快拍数下(约 40 快拍)性能即能收敛,且稳健稀疏 Capon 算法较其他 2 种算法具有较好的输出性能。

从图 4 可以看出,本文提出的算法较稀疏约束 Capon 波束形成具有更好的性能,且对阵列模型误差及 DOA 偏差等引起的期望信号导向矢量失配具有一定的稳健性,但在高信噪比下由于协方差矩阵中含有期望信号,导致算法性能下降。

实验三:阵列条件如上,快拍数为 200。期望信号信噪比为 0 dB,2 个干扰信号信噪比均为 30 dB,阵列加入 ± 3.0 dB 的幅度误差和 $\pm 30^\circ$ 的相位误差,估计期望信号来向偏差从 $-5^\circ \sim 5^\circ$ 变化。输出 SINR 随期望信号 DOA 估计偏差变化如图 5 所示。

从图 5 可以看出,传统 Capon 算法性能随 DOA 估计偏差的增大而下降,稀疏约束 Capon 算法对 DOA 失配具有一定的稳健性,本文提出的算法对阵列模型误差及 DOA 偏差等引起的期望信号导向矢量失配具有较好的稳健性,且在期望信号 DOA 失配下较稀疏约束 Capon 算法具有一定的性能提升。

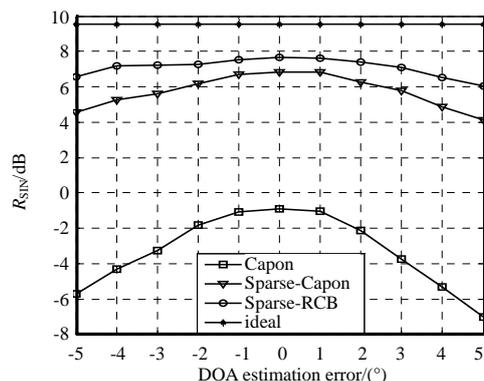


Fig.5 SINR with the change of DOA estimation error
图 5 SINR 随 DOA 估计偏差变化图

4 结论

常规 Capon 波束形成算法具有相对较高的旁瓣增益,且在期望信号导向矢量存在失配,对阵列输出性能有一定的影响。为解决这一问题,引入了稀疏约束 Capon 波束形成算法,该算法降低了旁瓣,对期望信号不确定具有一定稳健性,但在幅相误差、期望信号指向偏差等多种误差同时存在的情况下其性能下降。本文在稀疏约束 Capon 波束形成算法基础上,提出了一种稳健的稀疏 Capon 波束形成算法。该算法主要是在最差性能最优化的情况下,在稀疏 Capon 上增加了一个导向矢量存在偏差的约束条件。通过计算机仿真验证了新算法在多种误差环境下的有效性与优越性。

参考文献:

- [1] 鄢社锋,马远良.波束优化研究进展[C]//中国声学学会 2006 年全国声学学术年会.厦门:[s.n.],2006:459-460.(YAN Shefeng,MA Yuanliang. Process in sensor array beam optimization[C]//China National Acoustics Acoustical Society 2006 Annual meeting. Xiamen,Fujian,China:[s.n.],2006:459-460.)
- [2] LIU J,Gershman A B,LUO Z Q,et al. Adaptive beamforming with sidelobe control:second-order cone programming approach[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2003;10(11):331-334.
- [3] ZHANG Y,Ng B P,WAN Q. Sidelobe suppression for adaptive beamforming with sparse constraint on beam pattern[J]. Electronics Letters, 2008,44(10):615-616.
- [4] LIU Y P,WAN Q. Robust beamformer based on total variation minimization and sparse constraint[J]. Electronics Letters, 2010,46(25):1697-1699.