

文章编号: 2095-4980(2015)02-0245-06

基于时域体面积分方程的分块预条件方法

孔令荣, 王昊

(南京理工大学 泰州科技学院 电子电气工程学院, 江苏 泰州 225300)

摘要: 时域电场积分方程性态较好, 但时域面积分方程性态较差, 这就造成体面耦合的时域电场积分方程在迭代求解时经常遇到收敛较慢的问题, 无法满足工程需要, 并且一般预条件技术获得的加速效果也不甚理想。因此, 时域体面积分方程迭代求解时间过长已成为体面积分方程在实际工程应用中的核心问题。针对时域体面电场积分方程矩阵性态差的问题, 提出一种引入分块预条件方法(BMP), 可以加快矩阵迭代收敛的速度。将时域体面积分方程的矩阵分解成3块矩阵相乘的形式, 而这3块矩阵都是稀疏的, 并通过几个体面算例说明该预条件技术的效率。

关键词: 分块矩阵; 预条件; 耦合; 体面积分方程; 迭代解

中图分类号: TN011; TM15

文献标识码: A

doi: 10.11805/TKYDA201502.0245

Block pre-conditioner based on time domain volume-surface integral equation

KONG Lingrong, WANG Hao

(School of Electronic and Electric Engineering, Taizhou Institute of Science and Technology,
Nanjing University of Science and Technology, Taizhou Jiangsu 225300, China)

Abstract: The state of time domain electric field volume integral equation is good, while that of surface integral equation is poor, which results in slow convergence in the iterative solution of time domain electric field integral equation with volume-surface coupling, unable to meet the project requirements. Furthermore, the acceleration effect obtained by general preconditioning techniques is not very ideal. Therefore, a too long iteration time for time domain volume-surface integral equation has become the core issue in practical engineering applications. Aiming at the problem of poor behavior matrix, a new Block Matrix Pre-conditioner(BMP) method which can accelerate the convergence of matrix iteration is proposed. The time domain volume-surface integral equation matrix is decomposed into three pieces in the form of matrix multiplication, and the three matrices are all sparse. The efficiency of the preconditioning technique is illustrated by several volume-surface examples.

Key words: block matrix; pre-conditioner; coupled; volume-surface integral equation; iterative solution

实际工程中多数电磁目标都是金属介质混合的结构, 比如微带结构、涂覆飞行目标、频率选择表面、滤波器。由于这种混合结构的普遍性, 金属介质混合目标的电磁计算问题是计算电磁学的一个经典问题。应用矩量法(Method of Moments, MoM)求解频域积分方程是当今普遍使用的数值计算方法。但是, 频域技术对于非时谐电磁场分析的局限性和非时谐电磁场问题的复杂性与普遍性也构成了当代工程电磁学的一大矛盾, 这一矛盾推动了时域技术的发展和运用。计算机硬件技术的发展使人们逐步具有了在时域对具有宽频带特性的瞬态电磁场问题直接计算分析的能力。与频域方法相比, 时域方法具有诸多优点^[1-3]。时域方法能够直观反映目标之间电磁波相互作用随时间的变化情况, 可以方便、直接地处理非线性媒质和时变媒质的散射问题和辐射问题。但是时域体面积分方程收敛性较差, 而时间步进体面积分方程求解时, 需要在每个时间步上进行迭代求解, 迭代时间过长成为其分析问题的障碍, 迭代部分的耗时常常比矩阵填充更多。如何提高收敛性成为重要的研究问题。分块预条件(BMP)最初运用于有限元(Finite Element Method, FEM)方程求解过程中, 以应对矩量法求解的金属部分电场积分方程

收稿日期: 2014-05-05; 修回日期: 2014-06-09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60672075;61170035)

(Electric Field Integral Equation, EFIE)的收敛问题^[4-8]。为了提高BMP的计算效率,先将每一个子矩阵稀疏化,剔出小值元素,然后对主对角线上的块矩阵构造其求逆矩阵,通过其推导整个矩阵的逆矩阵^[9-10]。由于LU分解方法使用的内存较少,本文使用不完全LU分解方法构造子矩阵逆矩阵,将其内存消耗和收敛效果与传统的不完全LU分解方法作对比。

1 时域电场体面积分方程

假设介质金属组合目标I,位于无界空间 Π 中,目标介质的介电常数为 $\varepsilon(\vec{r})$,磁导率为 μ_0 ,无界空间 Π 的介电常数为 ε_0 ,磁导率为 μ_0 ^[11-12],当介质金属组合I受到入射电场 $\vec{E}^{\text{inc}}(\vec{r},t)$ 激励时,在介质目标内将会产生极化体电流 $\vec{J}_v(\vec{r}',t)$,而在金属表面将会产生感应面电流 $\vec{J}_s(\vec{r}',t)$,根据等效原理可知,介质金属组合目标对入射波的散射,可以等效为自由空间中其相应区域内的体极化电流 $\vec{J}_v(\vec{r}',t)$ 和金属表面产生的感应面电流 $\vec{J}_s(\vec{r}',t)$ 引起的散射之和^[13]。

由于总电场等于入射场与散射场之和,因此在介质体上可以得到^[14-15]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}^{\text{sca}}(\mathbf{r},t) \quad (1)$$

在金属表面,总电场的切向分量为0,即

$$\left[\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}^{\text{sca}}(\mathbf{r},t) \right]_{\text{tan}} = 0 \quad (2)$$

电场散射 $\mathbf{E}^{\text{sca}}(\mathbf{r},t)$ 定义为:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_v^{\text{sca}}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_v(\mathbf{r},t) - \nabla \Phi_v(\mathbf{r},t) \\ \mathbf{E}_s^{\text{sca}}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_s(\mathbf{r},t) - \nabla \Phi_s(\mathbf{r},t) \end{cases} \quad (3)$$

式中:下标V表示体单元;S表示面单元。

在介质中,电通量密度 $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ 与总电场 $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ 之间存在如下关系:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \quad (4)$$

整理后带入式(3),将介质与金属区域的散射场与入射场相加,得到时域体面积分EFIE方程的表达式如下:

$$\mathbf{E}^{\text{inc}} = \frac{\mathbf{D}}{\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_v(\mathbf{r},t) + \nabla \Phi_v(\mathbf{r},t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_s(\mathbf{r},t) + \nabla \Phi_s(\mathbf{r},t) \quad (5)$$

$$\mathbf{E}_{\text{tan}}^{\text{inc}} = \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_s(\mathbf{r},t) + \nabla \Phi_s(\mathbf{r},t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_v(\mathbf{r},t) + \nabla \Phi_v(\mathbf{r},t) \right]_{\text{tan}} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{A}_v(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\mathbf{J}_v(\mathbf{r}',\tau)}{R} dV'$; $\mathbf{A}_s(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \frac{\mathbf{J}_s(\mathbf{r}',\tau)}{R} dS'$; $\Phi_v(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_v \frac{\rho(\mathbf{r}',\tau)}{R} dV'$; $\Phi_s(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_s \frac{\rho(\mathbf{r}',\tau)}{R} dS'$ 。

在介质体内将电通量密度 $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ 按时间基函数和空间SWG(Shaubert-Wilton-Glissson)基函数展开后得到:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) \cong \sum_{n=1}^{N_D} \sum_{l=1}^{N_t} I_n^l \mathbf{f}_n^V(\mathbf{r}') T_l(t) \quad (7)$$

式中: N_D 是散射体包含的SWG基函数的个数; N_t 表示时间步的个数。

在金属表面将电流密度 $\vec{J}_s(\vec{r},t)$ 按时间基函数和空间RWG(Rao-Wilton-Glissson)基函数展开后得:

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r}',t) \cong \sum_{n=1}^{N_s} \sum_{l=1}^{N_t} I_n^l \mathbf{f}_n^S(\mathbf{r}') T_l(t) \quad (8)$$

式中 N_s 是散射体包含的RWG基函数的个数。

将基函数展开式(7)、式(8)代入到矢量位和标量位的表达式中可以得到:

$$\mathbf{A}_v(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{n=1}^{N_D} \left[\int_v \kappa_n(\mathbf{r}') \mathbf{f}_n^V(\mathbf{r}') \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(t) d\mathbf{r}' \right] D_n \quad (9)$$

$$\Phi_v(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{N_D} \left[\int_v \kappa_n(\mathbf{r}') (\nabla \mathbf{f}_n^V(\mathbf{r}')) \frac{1}{R} \cdot T(t) d\mathbf{r}' + \int_v (\nabla \kappa_n(\mathbf{r}')) \mathbf{f}_n^V(\mathbf{r}') \frac{1}{R} \cdot T(t) d\mathbf{r}' \right] D_n \quad (10)$$

$$A_s(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{n=1}^{N_s} \left[\int_V \mathbf{f}_n^S(\mathbf{r}') \frac{1}{R} \cdot T(t) d\mathbf{r}' \right] I_n \quad (11)$$

$$\Phi_s(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{N_s} \left[\int_V \nabla \mathbf{f}_n^S(\mathbf{r}') \frac{1}{R} \cdot \partial^{-1} T(t) d\mathbf{r}' \right] I_n \quad (12)$$

将上述由基函数展开式得到的矢量位和标量位式(9)、(10)、(11)、(12)代入到时域体面积分方程表达式(5)、(6), 将方程离散, 然后对离散后的时域电场积分方程在空间域上进行伽辽金测试, 在时间域上进行点匹配得到时域矩阵方程表示为:

$$\mathbf{Z}_0 \mathbf{I}_j = \mathbf{V}_j^{\text{inc}} - \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{Z}_{i-j} \mathbf{I}_i \quad j=1,2,\dots,N_t \quad (13)$$

式中: $\mathbf{V}_j^{\text{inc}}$ 表示第 j 个时间步时的激励向量; \mathbf{I}_j 为第 j 个时间步时的电流系数向量, $\bar{\mathbf{I}}_j = [\bar{I}_{j,1}, \bar{I}_{j,2}, \dots, \bar{I}_{j,N_s}]^T$; N_t 表示时间步的个数; \mathbf{Z}_{i-j} 是时延 $(i-j)$ 个时间步的时域阻抗矩阵; $i, j=1,2,3,\dots, i \geq j, i-j$ 代表时延 $(i-j)\Delta t$, Δt 表示一个时间步, $\Delta t = 1/(10 \cdot f_{\text{max}})$, f_{max} 表示入射波的最高频率。 \mathbf{Z}_0 表示 2 个基函数 m, n 相互作用时涉及到有的高斯点之间的空间距离小于 1 个时间步长, 其在矩阵中的元素值 $Z_{mn,0}$ 才为非零值, 否则为零。同理, \mathbf{Z}_1 表示 2 个基函数 m, n 相互作用时涉及到有的高斯点之间的空间距离处于 1~2 个时间步长之间, 依次类推 $\mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3, \dots$ 。根据时间步进策略, 如果已知初始时刻的电流系数 $I_0 = 0$, 可以通过上式求解出时刻 1 的电流系数 I_1 , 然后再通过 I_0, I_1 求解出 I_2 , 依次类推。延时时矩阵根据基函数和测试函数是金属上的 RWG 还是介质体内的 SWG 可以分成 4 块矩阵, 简写成以下形式:

$$\mathbf{Z}_{i-j} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{DD}} & \mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{DM}} \\ \mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{MD}} & \mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{MM}} \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中: 上标 M 表示金属; D 表示介质; 下标 m 表示测试基函数号; n 表示源基函数号; i 表示第 i 时间步; j 表示第 j 时间步。

2 新型分块预条件

针对时域体面积分方程收敛性问题, 本文引进一种新型的预条件技术以提高时域体面积分方程的收敛性。一般预条件都是基于如下等式:

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{I} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{V} \quad (15)$$

式中: \mathbf{M}^{-1} 表示通过不同预条件技术构造的近似逆矩阵, 其维数就是待求矩阵方程的维数 N ; $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{Z}$ 条件数优于 \mathbf{Z} 矩阵的条件数, 使得矩阵方程(15)更易于迭代求解。体面积分方程由于矩阵元素相差较大, 所以条件数较差, 分块预条件通过将矩阵分块, 分别求小矩阵的逆, 推算出大矩阵的逆, 这样不仅降低了矩阵求逆的计算复杂度, 而且得到的逆比传统直接用预条件技术求得的逆更加准确。

原始矩阵分块如下:

$$\mathbf{Z} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{DD}} & \mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{DM}} \\ \mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{MD}} & \mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{MM}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{\text{DD}} & 0 \\ \mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{MD}} (\mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{DD}})^{-1} & \mathbf{I}^{\text{MM}} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{DD}} & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{MM}} - \mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{MD}} (\mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{DD}})^{-1} \mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{DM}} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{\text{DD}} & (\mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{DD}})^{-1} \mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{DM}} \\ 0 & \mathbf{I}^{\text{MM}} \end{bmatrix} \quad (16)$$

矩阵的逆矩阵如下:

$$(\mathbf{Z}_{\text{near}})^{-1} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{\text{DD}} & -(\mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{DD}})^{-1} \mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{DM}} \\ 0 & \mathbf{I}^{\text{MM}} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} (\mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{DD}})^{-1} & 0 \\ 0 & (\mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{MM}} - \mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{MD}} (\mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{DD}})^{-1} \mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{DM}})^{-1} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{\text{DD}} & 0 \\ -\mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{MD}} (\mathbf{Z}_{mn,i-j}^{\text{DD}})^{-1} & \mathbf{I}^{\text{MM}} \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中： \mathbf{I}^{DD} 和 \mathbf{I}^{MM} 的维数分别为 $N^D \times N^D$ 、 $N^M \times N^M$ ， N^D 和 N^M 分别表示SWG基函数和RWG基函数的个数。不难发现时域体面积分方程中 $\mathbf{Z}_{mn,i-j}^{MD}(\mathbf{Z}_{mn,i-j}^{DD})^{-1}\mathbf{Z}_{mn,i-j}^{DM}$ 数值上与 $\mathbf{Z}_{mn,i-j}^{MM}$ 相比可以忽略，最终分块预条件构造的逆矩阵 \mathbf{M}^{-1} ，可以近似表示为如下形式：

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{DD} & -(\mathbf{Z}_{mn,i-j}^{DD})^{-1}\mathbf{Z}_{mn,i-j}^{DM} \\ 0 & \mathbf{I}^{MM} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} (\mathbf{Z}_{mn,i-j}^{DD})^{-1} & 0 \\ 0 & (\mathbf{Z}_{mn,i-j}^{MM})^{-1} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{DD} & 0 \\ -\mathbf{Z}_{mn,i-j}^{MD}(\mathbf{Z}_{mn,i-j}^{DD})^{-1} & \mathbf{I}^{MM} \end{bmatrix} \quad (18)$$

只需要求得主对角线上的小块矩阵就可以得到整个矩阵的逆。

3 数值计算与分析

本文运用4个算例验证分块矩阵预条件应用的准确性和效率。本次计算运用的PC计算机硬件配置是2.3 GHz的CPU内核，内存为3.2 GHz。二阶范数的剩余误差至迭代结束时小于 1×10^{-3} 。同时，使用广义最小残量方法(Generalized Minimal Residual Algorithm, GMRES)(30)作为迭代方法，30作为GMRES子空间Krylov的维数。零向量作为所有算例的初始近似解。

3.1 算例计算

算例1：考虑一种涂覆介电材料的导体球，介电材料的介电常数是 $\epsilon_r=2$ ，导体球半径和导体壳外表面的长度分别是0.2 m和0.25 m，导体球介质剖分得到1674个四面体，导体球金属剖分得到480个三角形，总未知量4627个，其中金属部分720和介质部分3907，入射波为调制高斯脉冲，其中心频率设为150 MHz，带宽为300 MHz，入射平面波垂直入射，沿X方向极化，入射波沿Z轴正方向传播。图1所示为垂直入射平面波的150 MHz时双站雷达散射截面(Radar Cross-Section, RCS)图。通过观察结果可以发现，通过ILUTP(Incomplete LU factorization with Truncation and Pivoting)预条件和BMP预条件的结果与更加优良的Mie系列解是吻合的，这正是需要的结果，图2所示为BMP与ILUTP预条件在时域体积分方程求解中运用时的迭代收敛情况。

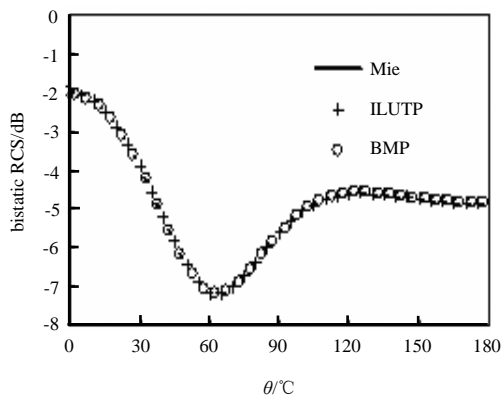


Fig.1 Bistatic RCS($\varphi=0$) of a coated sphere with inner and outer radii are $0.2\lambda_0$ and $0.25\lambda_0$, $\epsilon_r=2$

图1 150 MHz 双站雷达散射截面($\varphi=0$)的内、外半径为 $0.2\lambda_0, 0.25\lambda_0$ ，相对介电常数 $\epsilon_r=2$

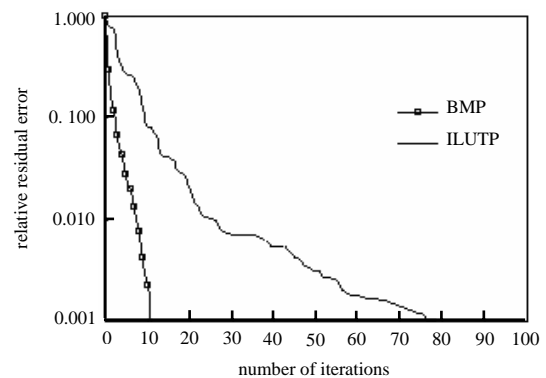


Fig.2 Convergence of coated sphere example by using pre-conditioner

图2 涂覆球体运用预条件收敛情况

算例2：考虑一种圆锥结构，上部半径为0.4 m，高为0.5 m，相对介电常数 $\epsilon_r=2.0$ ，上部覆盖一个半径同样为0.4 m的金属贴片。入射波为调制高斯脉冲波，其中心频率设为150 MHz，带宽为300 MHz，入射平面波垂直入射，沿X方向极化，入射波传播方向为Z轴正方向。图3所示为分块预条件BMP与传统预条件方法ILUTP迭代求解收敛情况。

算例3：考虑一种 $0.50 \text{ m} \times 1.00 \text{ m} \times 0.05 \text{ m}$ ，介电常数为2的介质体，上面覆盖一层金属板，入射波中心频率为0.3 GHz，入射角 $\theta=0$ ， $\varphi=0$ ，未知量(3256介质基函数SWG+693金属基函数RWG=3889)。图4所示为覆盖金属板介质体运用预条件收敛情况。

算例4：考虑一种介质圆柱和金属圆柱重叠放置的2层圆柱，单个小圆柱的半径为0.5 m，高为0.15 m，相

对介电常数为 $\epsilon_r = 2$ ，介质是无耗的，入射波为调制高斯脉冲，波的传播方向为 Z 轴正方向，沿 X 方向偏振，带宽为 240 MHz，中心频率为 120 MHz。图 5 所示为 2 层圆柱运用预条件收敛情况。

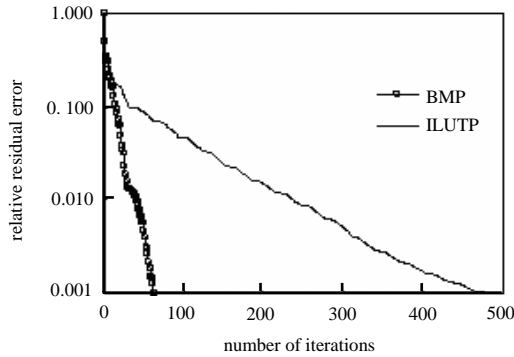


Fig.3 Convergence of disc cone example by using pre-conditioner
图 3 盘锥体运用预条件收敛情况

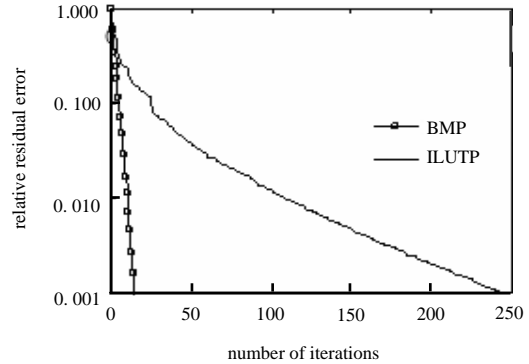


Fig.4 Convergence of medium coverage of the metal plate example by using pre-conditioner
图 4 覆盖金属板介质体运用预条件收敛情况

3.2 运算时间与使用内存情况比较

表 1 所示为 4 个算例分别使用本文预条件 BMP 与 ILUTP 预条件的运算时间与消耗内存情况。

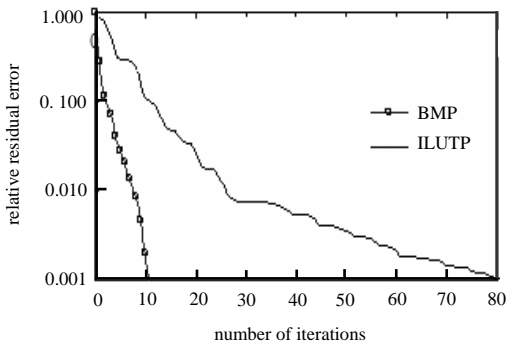


Fig.5 Convergence of two-layer cylindrical example by using pre-conditioner
图 5 两层圆柱算例运用预条件收敛情况

表 1 BMP 预条件与 ILUTP 预条件运算时间与消耗内存对比
Table 1 Comparison of operation time and memory consumption of BMP and ILUTP pre-conditioner

	pre-conditioner	running time consumption/s	memory consumption/MB
example 1	ILUTP	3.87	7.40
	BMP	0.76	6.10
example 2	ILUTP	126.80	118.00
	BMP	25.20	32.00
example 3	ILUTP	35.53	143.20
	BMP	2.98	45.00
example 4	ILUTP	110.60	124.00
	BMP	15.70	24.20

4 结论

本文提出一种基于分块矩阵预条件并结合时域体面积分。通过 4 个算例的数值结果验证了其准确性和效率。与传统的中心预条件 ILUTP 相比，仅需更少的迭代预条件的 BMP 方法就可以达到预期的精确度，也显示出其在运算时间和内存使用等方面的优势。

参考文献:

[1] 聂在平,方大纲. 目标与环境电磁散射特性建模:理论、方法与实现[M]. 北京:国防工业出版社, 2009. (NIE Zaiping, FANG Dagang. Modeling of Electromagnetic Scattering Characteristic of Target and Environment:Theory,Method and Implementation[M]. Beijing:National Defence Industry Press, 2009.)

[2] LU C C,CHEW W C. A coupled surface-volume integral equation approach for the calculation of electromagnetic scattering from composite metallic and material targets[J]. IEEE Transactions on Antennas Propagation, 2000,48(12):1866-1868.

[3] NIE X C,YUAN N,LI L W,et al. A fast volume-surface integral equation solver for scattering from composite conducting-dielectric objects[J]. IEEE Transactions on Antennas Propagation, 2005,53(2):818-824.

[4] Andriulli F P,Cools K,Bagci H,et al. A multiplicative Calderón preconditioner for the electric field integral equation[J]. IEEE Transactions on Antennas Propagation, 2008,56(8):2398-2412.

- [5] Bagci H, Andriulli F P, Cools K, et al. A Calderón multiplicative preconditioner for coupled surface-volume electric field integral equations[J]. *IEEE Transactions on Antennas Propagation*, 2010, 58(8):2680–2690.
- [6] Budko N V, Samokhin A B. Spectrum of the volume integral operator of electromagnetic scattering[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2006, 28(2):682–700.
- [7] Adams R J. Physical and analytical properties of a stabilized electric field integral equation[J]. *IEEE Transactions on Antennas Propagation*, 2004, 52(2):362–372.
- [8] DING D Z, TAO S F, CHEN R S. Fast analysis of finite and curved frequency-selective surfaces using the VSIE with MLFMA[J]. *International Journal of Numerical Modeling: Electronic Networks, Devices and Fields*, 2011, 24(5):425–436.
- [9] LI M, LU C C, ZENG Z. Localized preconditioning for radiation calculation of antennas mounted on large and complex platforms[C]// *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*. [S.l.]:IEEE, 2006:1899–1902.
- [10] Lee J F, Sun D K. P-type multiplicative Schwarz(pMUS) method with vector finite elements for modeling three-dimensional waveguide discontinuities[J]. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Technology*, 2004, 52(3):864–870.
- [11] Lee J F, Lee R, Teixeira F. Hierarchical vector finite elements with p-type non-overlapping Schwarz method for modeling waveguide discontinuities[J]. *CEMS-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2004, 5(5):423–434.
- [12] Malas T, Gurel L. Schur complement preconditioners for surface integral equation formulation of dielectric problems solved with the multilevel fast multipole algorithm[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2011, 33(5):2440–2467.
- [13] Rao S M, Wilton D R, Glisson A W. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape[J]. *IEEE Trans. on Antennas Propag.*, 1982, 30(3):409–418.
- [14] 张杰, 罗勇, 潘成胜. 94 GHz 回旋管准光模式变换器的数值模拟[J]. *太赫兹科学与电子信息学报*, 2014, 12(2):180–182. (ZHANG Jie, LUO Yong, PAN Chengsheng. Numerical simulation of quasi-optical mode converter for 94 GHz gyrotron[J]. *Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology*, 2014, 12(2):180–182.)
- [15] Chew W C, Jin J M, Mideielsen E, et al. *Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics*[M]. Boston:Artech House, 2001.

作者简介:



孔令荣(1983–), 男, 江苏省扬州市人, 硕士, 讲师, 主要研究方向为电磁场数值计算与微波天线相关技术.email:642711803@qq.com.

王昊(1985–), 男, 江苏省泰兴市人, 硕士, 讲师, 主要研究方向为射频集成电路设计与制造, 电磁场数值计算与建模.