

文章编号: 2095-4980(2016)04-0636-04

基于定点 DSP 的复数求模值近似算法的实现

尹 晗, 王占超

(北京航空航天大学 电子信息工程学院, 北京 100191)

摘 要: 工程应用中, 定点数字信号处理器(DSP)因其可编程、速度快、功耗小、成本低等特点在数字系统中被广泛使用。但由于定点 DSP 数据动态范围小, 在其上依定义计算复数的模值会带来“数据溢出”的问题。介绍了一种基于定点 DSP 的复数求模值近似算法。该算法以复数模值的工程近似计算方法为基础, 对其进行优化并在定点 DSP 中进行算法实现。通过算法优化, 可以在数据不溢出的前提下大幅提高复数求模的精确度。

关键词: 数字信号处理器; 复数求模值; 工程近似

中图分类号: TN95

文献标识码: A

doi: 10.11805/TKYDA201604.0636

Approximate calculation of complex modulus based on fixed-point DSP

YIN Han, WANG Zhanchao

(School of Electronic and Information Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: Fixed-point Digital Signal Processing(DSP) is widely used in the engineering applications because of its characteristics like high speed, low consumption, low cost and being programmable. However, the data dynamic range of fixed-point DSP is extremely narrow, which will cause “data overflow” when calculating the complex modulus according to its definition. An optimized method based on the traditional approximate calculation of complex modulus is put forward and realized on the fixed-point DSP. It can greatly increase the accuracy of the calculation of complex modulus in the guarantee of no data overflow.

Key words: Digital Signal Processing; complex modulus; approximate calculation

内部应用哈佛结构的 DSP 是专门为了数字信号处理应用而设计的高速芯片^[1]。近些年来随着 DSP 硬件迅速发展, 其运算性能也有了大幅提高, 尤其是多核 DSP 的诞生, 使得 DSP 的处理速度又上升到一个新的台阶^[2]。基于上述背景, 工程应用中, 许多复杂的数据处理算法都会选择在 DSP 中实现。DSP 按照数据格式分类可分为定点和浮点 DSP 两类, 在定点 DSP 中, 由于小数点位数固定, 整数位数与小数位数之和为固定字长。当所要表示的数字动态范围很大时, 定点 DSP 中用来表示整数的位数增多, 小数的位数自然减少, 导致数据精确度下降。

在数字系统中, 对数据进行处理常常会涉及到先将模数转换器采集到的实信号转换成复信号后, 再进行信号分析, 复信号在进入 DSP 进行数据处理后通常会进行求模值运算^[3]。依定义, 计算复数的模值需要将实部与虚部进行平方运算, 在对数据精确度有较高要求的情况下, 定点 DSP 中进行平方运算会带来“数据溢出”的问题。

本文针对解决的问题就是在保留数据精确度的条件下, 在定点 DSP 中对复信号进行求模值运算。依定义计算模值会引入平方运算及开根运算, 其中平方运算会导致数据动态范围翻倍, 进而导致数据溢出; 开根运算会涉及到位数取舍的问题, 进而导致精确度损失。算法硬件实现过程中选用的 DSP 为 TI 公司的 TMS320C6455 芯片^[4], 该款芯片为 32 位定点 DSP, 每秒可执行 9 600 M 条指令, 拥有串行高速 IO 接口、外部存储器接口等数据传输接口, 并且拥有配合数据搬移的内部增强型内存直接存取模块, 其能表示的最大数值可达 $2^{32}-1$ 。

1 算法基本原理

对于复数 $X = I + jQ$, 其模值定义为 $|X| = f(I, Q) = \sqrt{I^2 + Q^2}$ 。然而在定点 DSP 中却无法用上述方式实现对

复信号的求模值运算。主要原因是:在模值定义中,首先要求对复数的实部和虚部进行平方运算,但由于定点 DSP 中数据总线位宽固定,通常情况下定点 DSP 的数据位宽不超过 32 位,所能表示的数据动态范围是 -2^{31} 至 $2^{31}-1$ 。当经过某些运算使得复信号的实部或虚部达到 10^5 量级时,平方运算后数据动态范围可达到 10^{10} 量级。这个量级要大于定点 DSP 可表示的最大有符号型整数 $2^{31}-1$,从而造成数据溢出。除了溢出问题外,模值定义中包含的开根运算也无法在定点 DSP 中很好地实现。在定点处理器中由于小数点位数固定,数据的动态范围与数据精确度难以同时满足,进行开根运算会导致较大的数据精确度损失。综合以上两点考虑,依定义进行复数求模值运算无法在定点 DSP 中实现。

数据溢出和精确度损失的问题其根源在于平方及开根运算,为解决上述 2 个问题,工程上采用线性近似的方法^[5]:令 $|X| \approx g(I, Q) = a \max\{|I|, |Q|\} + b \min\{|I|, |Q|\}$, 其中 a, b 为加权系数,系数的估计与相对误差的要求有关。具体的误差估算方法如下:

对于复数 $X = I + jQ$, 不失一般性, 设 $|Q| \geq |I|$, 且有 $|Q| = K|I|$, 其中 $|K| \geq 1$ 。

于是模值的理论值为 $M = \sqrt{I^2 + (KI)^2} = \sqrt{1 + K^2} |I|$, 而近似值为 $\tilde{M} = aK|I| + b|I| = (aK + b)|I|$, 则相对误差为 $\Delta = \delta(K) = \frac{M - \tilde{M}}{M} = 1 - \frac{aK + b}{\sqrt{1 + K^2}}$ 。

确定加权系数 a, b 后, 相对误差仅与变量 K 有关。其关系曲线如图 1 所示。

相对误差关于变量 K 的函数在区间 $[1, \frac{a}{b}]$ 上为单调递减函数, 在区间 $[\frac{a}{b}, +\infty)$ 上为单调递增函数, 所以该函数取极值的点只能是在 $K=1, K=\frac{a}{b}, K=+\infty$ 3 个点上。对于相对误差的估计, 通常采用最大正、负误差绝对值相等的方法, 即所谓的等波纹近似, 结合图 1, 具体要求如下:

$$\delta(1) = \Delta = 1 - \frac{a+b}{\sqrt{2}}; \quad \delta\left(\frac{a}{b}\right) = -\Delta = 1 - \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \delta(\infty) = \Delta = 1 - a。$$

求解方程组可得: $\Delta = 3.957\%$; $a = 0.96043$; $b = 0.39784$ 。

2 算法优化

通过上一节得出的结论可以发现, 基本算法的相对误差过大, 不能满足工程应用中对精确度的要求。通过图 1 可以看出, 误差过大的原因在于将变量 K 的取值范围划归到整个正实数轴, 要保证相对误差的极大值在一个很大的范围内保持恒定, 就会导致这个值很大。解决上述问题最简单的方法是分类讨论^[6], 即将正实数轴分为若干个区间, 首先判断变量 K 落在哪个区间, 然后利用上述算法进行估计。以最简单的二分法为例, 假设选取的划分门限为 K_0 。

当复数的实部与虚部绝对值相差不多时, 即 $1 \leq K \leq K_0$,

采用一种方案; 当复数的实部与虚部绝对值相差很大时, 即 $K_0 \leq K \leq \infty$, 采用另一种方案, 示意图见图 2, 算法如下:

$$\text{当 } 1 \leq K \leq K_0 \text{ 时: } \delta(1) = \Delta = 1 - \frac{a+b}{\sqrt{2}}; \quad \delta(K_0) = \Delta = 1 - \frac{aK_0 + b}{\sqrt{1 + K_0^2}}; \quad K_0 < \frac{a}{b}。$$

$$\text{当 } K_0 \leq K \leq \infty \text{ 时: } \delta\left(\frac{a}{b}\right) = -\Delta = 1 - \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \delta(\infty) = \Delta = 1 - a; \quad \frac{a}{b} \leq K_0。$$

给定需要的误差值即可求得加权系数 a 和 b 。在定点 DSP 中采用的复数求模算法如下: 对于复数 $X = I + jQ$,

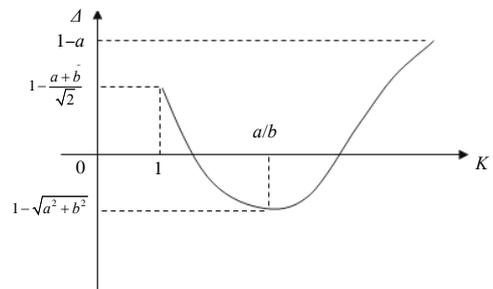


Fig.1 Relation between the relative error and K
图 1 相对误差与 K 的关系曲线

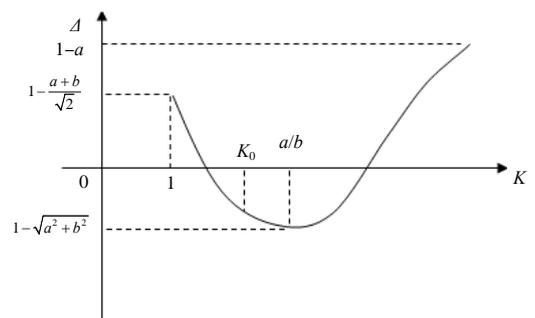


Fig.2 Sketch map of classification discussion
图 2 分类讨论方式示意图

令 $TL = \max\{|I|, |Q|\}$, $TS = \min\{|I|, |Q|\}$, 则有等价式成立: $|X| \approx \max\{TL + \frac{1}{8}TS, \frac{27}{32}TL + \frac{9}{16}TS\}$ 。

3 算法仿真结果及硬件实现

以实信号的傅里叶分析为例, 依定义计算实信号傅里叶变换后的幅值, 并分别按照基本算法和优化算法计算傅里叶变换后信号的近似幅值与真实幅值的相对误差。其 Matlab 具体仿真结果如图 3 所示。

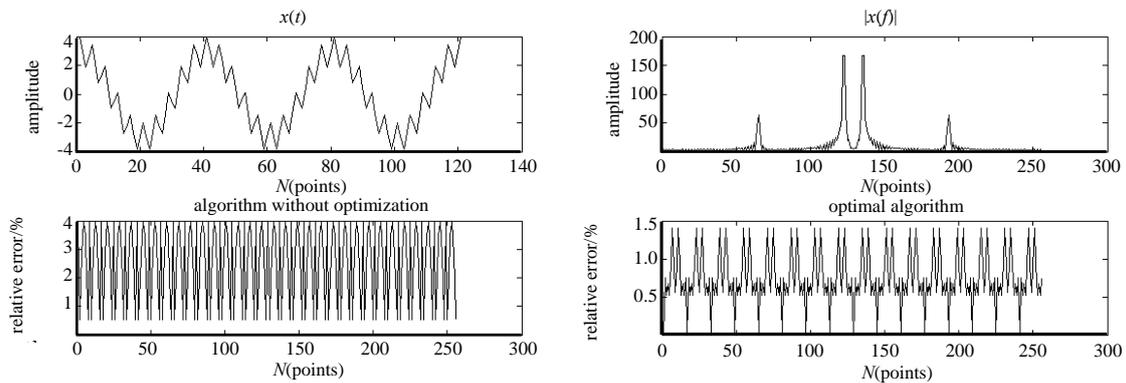


Fig.3 Simulation results of Matlab
图 3 Matlab 仿真结果

实信号 $x(t) = 10^5 \sin(2\pi f_1 t) + 10^5 \sin(2\pi f_2 t)$, 其中高频分量 $f_1 = 1 \text{ kHz}$, 低频分量 $f_2 = 100 \text{ Hz}$, 采样频率 4 kHz , FFT 变换的点数为 256 点。

在定点 DSP 中应用复数求模的优化算法避免了“平方运算”带来的数据溢出问题以及“开根运算”带来的精确度损失问题^[7]。但由于优化算法中涉及到了数乘及加法运算, 因此同样需要考虑进位引起的溢出问题。观察复数求模优化算法, 发现在进行数乘运算时, 加权值 a, b 是小于 1 的, 因此不用担心乘法溢出问题。对于加法运算, 2 个数的加法为了防止溢出需要将 2 个加数数据都缩小 1 倍。具体的复数求模优化算法在定点 DSP 中实现的程序流程如图 4 所示。

在程序流程图中需要注意的是, 在进行数乘运算时, 对于分数的乘法应先乘以分子后除以分母, 这样做的目的是防止精确度损失。在定点 DSP 中实现大批量的数据处理时, 通常会把原始数据定义成“int”型, 因为定点 DSP 处理小数运算的速度会非常缓慢^[8]。因此, 在具体实现过程中计算分数的乘法时要依照上述算法进行编程。

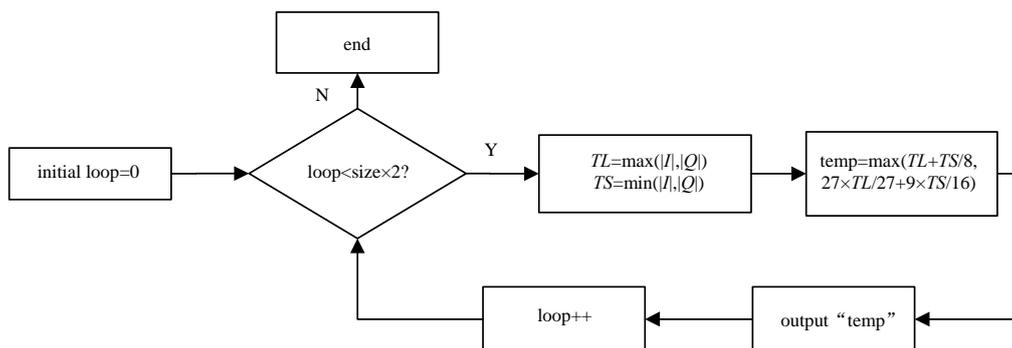


Fig.4 Flow chart of complex modulus in fixed-point DSP
图 4 复数求模在定点 DSP 中实现的程序流程图

4 结论

通过图 3 可以看出, 利用基本算法在计算模值时相对误差最大会达到 3.96%, 而经过分类讨论算法优化后的模值计算相对误差最大值减小到 1.59%, 由此说明分类讨论的方法可有效减小模值计算时的相对误差。如果划分区间增加, 相应的相对误差也会减小。在定点 DSP 中利用此复数求模值优化算法, 可有效解决依定义计算模值时带来的“溢出问题”及“精确度损失”问题。

参考文献:

- [1] 孙进平,王俊,李伟,等. DSP/FPGA 嵌入式实时处理技术及应用[M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 2011. (SUN Jinping,WANG Jun,LI Wei,et al. DSP/FPGA Embedded Real-Time Processing Technology and Application[M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 2011.)
- [2] 陈建平,吴国庆. TMS320C6000 系列 DSP 的最新进展[J]. 南通大学学报(自然科学版), 2006,5(4):67-70. (CHEN Jianping, WU Guoqing. The latest advance of TMS320C6000 DSPs[J]. Journal of Nantong University(Natural Science), 2006,5(4): 67-70.)
- [3] 许小剑,黄培康. 雷达系统及其信息处理[M]. 北京:电子工业出版社, 2010. (XU Xiaojian,HUANG Peikang. Radar System and Its Information Processing[M]. Beijing:Electronics Industry Press, 2010.)
- [4] 于凤芹. TMS320C6000 DSP 结构原理与硬件设计[M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 2008. (YU Fengqin. The Structure Principle and Hardware Design of TMS320C6000 DSP[M]. Beijing:Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 2011.)
- [5] 王波. 关于复数模值近似计算的讨论[J]. 西安电子科技大学学报, 1983(2):2-9. (WANG Bo. A discussion on approximate calculation of complex amplitude[J]. Journal of Xidian University, 1983(2):2-9.)
- [6] 范晓波. PD-脉冲压缩雷达实时信号处理及其并行实现[D]. 北京:北京航空航天大学, 2006. (FAN Xiaobo. Real time signal processing of PD-pulse compression radar and its parallel implementation[D]. Beijing:Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2006.)
- [7] XIANG Hong,WANG Jun,ZHANG Yuxi. Parallel implementation of high resolution radar signal processing system based on multi-IC architecture[C]// Radar Conference 2013, IET International. Xi'an,China:IET, 2013:1-4.
- [8] 曹景致,贺飞,李强,等. 基于 TMS320C6455 的高速数字信号处理系统设计[J]. 数字技术与应用, 2011(12):97-99. (CAO Jingzhi,HE Fei,LI Qiang,et al. Design of high-speed digital signal processing system based on TMS320C6455[J]. Journal of Digital Technology and Applications, 2011(12):97-99.)

作者简介:



尹 晗(1991-),男,北京市人,在读硕士研究生,主要研究方向为信号与信息处理.email: 1991yh@sina.com.

王占超(1990-),男,郑州市人,在读硕士研究生,主要研究方向为信号与信息处理.

(上接第 624 页)

- [11] 张明,李波,刘学全,等. 云计算下基于贝叶斯网络的多传感器目标识别[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2014,12(5): 740-744. (ZHANG Ming,LI Bo,LIU Xuequan,et al. Multi-sensor target recognition based on Bayesian classifier in cloud computing environment[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2014,12(5):740-744.)

作者简介:



耿 涛(1984-),男,陕西省汉中市人,博士,主要从事系统工程、信息融合理论与算法相关的研究工作.email:gengtao48119@163.com.

张 安(1962-),男,陕西省宝鸡市人,教授,主要从事系统工程、复杂系统分析与建模相关的研究工作.