第 15 卷　第 1 期　　太赫兹科学与电子信息学报　　Vol. 15, No. 1
2017 年 2 月　　Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology　　Feb., 2017

文章编号： 2095-4980(2017)01-0047-07

阵元失效下基于 Khatri–Rao 积的高分辨测向方法

谭伟杰，冯西安，张杨梅

(西北工业大学 航海学院，陕西 西安 710072)

摘　要： 在雷达、声呐、深空通信等实际应用中，阵元的失效会造成检测性能下降，虚警率增加；在目标方位估计中，阵元失效会造成采样协方差矩阵的秩亏问题，使得基于子空间类的传统目标方位估计方法失效。针对存在阵元失效的均匀线列阵的目标方位估计问题，提出了一种基于 Khatri–Rao(KR)积处理的阵列自由度恢复方法以及 Toeplitz 矩阵数据重构的高分辨 DOA 估计方法。首先对有损伤的阵列采样协方差矩阵进行 KR 积处理，将产生的冗余项进行平均处理，处理后的阵列模型将重构阵列自由度，并将阵列孔径扩展为之前的 2 倍。该阵列模型等效为一确定噪声下的单快拍的相干源估计，采用基于 Toeplitz 矩阵数据重构的方法来去相干，重构协方差，最后采用 MUSIC 方法进行方位估计。数值仿真表明该方法能有效解决均匀线列阵阵元失效下的自由度损失问题，提高阵列的目标方位估计性能，而且具有计算量小的优点。

关键词： 阵元失效；自由度恢复；Toeplitz 矩阵数据重构；高分辨 DOA 估计

中图分类号： TN911.7　　**文献标志码：** A　　**doi：** 10.11805/TKYDA201701.0047

High-resolution DOA estimation method based on Khatri–Rao product in presence of element failure

TAN Weijie，FENG Xi'an，ZHANG Yangmei

(School of Marine Science and Technology，Northwestern Polytechnical University，Xi'an Shaanxi 710072, China)

Abstract： An array freedom recovery method based on Khatri–Rao(KR) product and a high resolution estimation method based on Toeplitz matrix data reconstruction is proposed in order to resolve the array element failure of uniform linear array in DOA estimation. Firstly, the damaged sample covariance matrix is processed by KR product. The difference co-array conception is used to recover the degrees of freedom of array failure and double the array aperture. The processed model is equivalent to a coherent sources estimation problem of single snapshot under determined noise. Then, the Toeplitz matrix data reconstruction is used for the de-coherence of the sources. Finally, the DOA is estimated by traditional MUSIC method. Due to the exploitation of the reconstructed and extended virtual array aperture, the proposed method can estimate the DOA effectively in the failure of array element case. Numerical simulations demonstrate the effectiveness and low computational complexity of the proposed method.

Keywords： array element failure；degree of freedom recovery；Toeplitz matrix data reconstruction；high resolution DOA

阵列信号处理是目标检测、识别与定位中的关键技术，在一般文献中都假定阵元是完好的。然而，在实际应用中，由于恶劣的自然环境、人为干扰以及阵元老化、阵元的物理损坏等因素的影响，阵元失效问题不可避免。尤其在水下条件，环境更加复杂与恶劣，基阵阵元损坏的概率更大，阵元失效会破坏均匀线列阵的几何对称性和均匀性，使阵列输出信号产生失真，阵列响应发生锐变，严重情况下甚至导致子阵失效。在这些维修复杂、实时性要求高或是开销昂贵的特殊场合中，如何在阵元失效情况下恢复阵列的性能是需要深入研究的问题。

针对阵元失效问题，广大学者分别从阵元失效对于阵列性能的影响，阵元失效所带来的旁瓣级升高问题，以及失效阵元的有效恢复等问题展开了广泛的研究。针对阵元失效对于阵列性能的影响，研究者分别分析了均匀

收稿日期： 2015-07-02；**修回日期：** 2016-01-11
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(61271414)

线阵[1-2]、均匀圆阵[3]、矩形面阵[4]中失效阵元位置不同时对于阵列方向图以及阵列性能的影响。但并没有给出阵元失效情况下的阵元恢复的信号处理方法。针对阵元失效引起的波束形成的旁瓣级升高问题，文献[5-6]通过对失效阵元的输出进行预测、权重优化的方法来抑制旁瓣级，提高基阵指向性。针对失效阵元的有效恢复问题，文献[7-8]分别通过阵列数据重组、线性预测重构的方法来重构失效阵元的信号。徐朝阳等利用相邻阵元间信号具有固定相移的特点，通过合成的方法来恢复失效阵元的输出，抑制旁瓣增长[9]。在阵元失效情况下如何有效恢复阵列信号，进行高分辨的方位估计[10]、成像已成为阵列信号处理中的重要研究内容。Yerriswamy 等[11]在阵元数据缺损满足空时随机分布的前提下，提出通过低秩矩阵填充的方法来恢复阵列在空时上的缺损数据，然后在数据域直接采用矩阵束的方法进行目标方位估计。在实际中，假设的空时数据缺损的随机分布条件往往不能同时满足，阵元损坏会导致空间某一位置无法接收到任何数据，从而使得该方法失效。杨东等[12]考虑了空间采样中某一阵列完全损坏或者未采样情况下的问题，提出利用等距线阵数据间的等比特性，通过将某一时间采样上的数据重排，使得数据满足随机分布条件，进而将问题等效为一低秩矩阵填充问题。该方法虽然解决了某一阵元损坏或者降采样时的空时数据非随机分布，但存在 2 个重要缺陷，首先，数据重排后的矩阵填充是个降维处理，又要保证低秩条件，极大地降低了阵列的自由度。另外，逐个快拍进行数据填充所需的计算量非常大，在实际应用中不太现实。

本文针对均匀线列阵为阵元失效条件下的数据恢复问题，在假设阵元损伤为随机分布，阵元失效个数不超过一半的情况下，提出一种基于 KR 积处理的阵列自由度恢复方法以及 Toeplitz 矩阵数据重构的 DOA 估计方法。该方法通过差合作阵虚拟的方式一定程度上恢复出损伤阵元的自由度，进而采用 Toeplitz 矩阵数据重构来解决 KR 积处理后的解相干问题，而后采用传统的 MUSIC 方法进行目标的方位估计。数值仿真表明了该方法的有效性和实用性。

1 均匀线列阵模型

考虑 L 个阵元的均匀线性阵列，假设有 K 个非相关窄带目标信号分别从远场 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_K$ 方位照射到阵列。不同时间快拍表示为 $s_k(t)$ ， $t=1,2,\cdots,T$ ， $k=1,2,\cdots,K$ 。那么该阵列接收的信号矢量可以表示为：

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{\alpha}(\varphi_k)s_k(t)+n(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(t)+n(t) \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{\alpha}(\varphi_k)=\left[1,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}d_1\sin(\varphi_k)},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}d_{L-1}\sin(\varphi_k)}\right]^{\mathrm{T}}\in C^{L\times 1}$ 为 φ_k 对应的导向矢量，d_i 表示阵元位置，$d_i=d(i-1)$ ，$i=1,2,\cdots,L$ 。对 φ_k 进行归一化，令 $\bar{\varphi}_k=(d/\lambda)\sin(\varphi_k)\in[-1/2,1/2)$,$\boldsymbol{\alpha}(\bar{\varphi}_k)=\left[1,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\bar{\varphi}_k},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(L-1)\bar{\varphi}_k}\right]^{\mathrm{T}}\in C^{L\times 1}$,其中$\lambda$表示来波信号波长；$\boldsymbol{A}=\left[\alpha(\varphi_1),\alpha(\varphi_2),\cdots,\alpha(\varphi_K)\right]$为阵列流型；假定 $s_k(t)$ 服从方差为 σ_k^2 的独立高斯分布，表示为 $\boldsymbol{s}(t)=[s_1(t),s_2(t),\cdots,s_k(t)]$；噪声 $n(t)$为服从复高斯分布 $NC(0,\sigma_n^2)$ 的独立同分布随机变量，均值为 0，方差为 σ_n^2 。那么信号 $\boldsymbol{x}(t)$的协方差矩阵可以表示为：

$$\boldsymbol{R}_{xx}=E[\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(t)]=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_K^2\end{bmatrix}\boldsymbol{A}^H+\sigma_n^2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_{ss}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}+\sigma_n^2\boldsymbol{I}=\sum_{k=1}^{K}\sigma_k^2\boldsymbol{\alpha}(\varphi_k)\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}(\varphi_k)+\sigma_n^2\boldsymbol{I} \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{R}_{ss}=E[\boldsymbol{s}(t)\boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}(t)]=diag([\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_K^2])\in R^{K\times K}$ 为信源协方差矩阵；σ_k^2 为第 k 个信源的功率；$\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵。

$$\hat{\sigma}_k=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{\mathrm{T}}s_k(t)s_k^*(t)\ \ k=1,2,\cdots,K \tag{3}$$

实际中，协方差矩阵是未知的，只有在采样时间无限长的情况下才能够精确地估计。一般协方差矩阵可以通过如下的采样协方差矩阵来获得：

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{xx}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{H}} \tag{4}$$

两边减去噪声协方差矩阵，可以得到

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{xx}-\sigma_n^2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_{ss}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{E} \tag{5}$$

$\boldsymbol{E}$ 的第(p,q)位置的元素为：

$$E_{pq}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1,i\neq j}^{K}A_{pi}A_{qj}^{*}s_i(t)s_j^{*}(t)+\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{K}\sum_{i=1}^{K}A_{pi}s_i(t)n^{*}(t)+\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{K}n_p(t)s_i^{*}(t)A_{qi}^{*}+$$
$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}n_p(t)\varepsilon_q^{*}(t)-\sigma^2 I_{pq}\qquad 1\leqslant p,q\leqslant L \tag{6}$$

2　基于差合作阵的阵列恢复的方法

2.1 基于 Khatri–Rao 积的差合作阵的 DOA 估计方法

在不考虑测量噪声的情况下，通过向量化协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_{xx}$，可以构建合作阵的接收信号矢量[13-14]，得到以下的测量向量：

$$\boldsymbol{z}=vec(\boldsymbol{R}_{xx})=vec\left[\sum_{k=1}^{K}\sigma_k^2\boldsymbol{\alpha}(\varphi_k)\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}(\varphi_k)\right]+\sigma^2 1_n\;=\left[\boldsymbol{A}^{*}\odot\boldsymbol{A}\right]p+\sigma^2 1_n=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{p}+\sigma^2 1_n \tag{7}$$

式中：$\boldsymbol{A}^{*}\odot\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\varphi_1)\otimes\boldsymbol{a}(\varphi_1),\cdots,\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\varphi_K)\otimes\boldsymbol{a}(\varphi_K)]$；$\boldsymbol{p}=[\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_k^2]^{\mathrm{T}}$；$1_n=[\mathbf{e}_1^{\mathrm{T}},\mathbf{e}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\mathbf{e}_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{e}_i$ 表示除了第 i 项为 1，其余项全为 0 的向量；$\odot$ 表示 KR 积；$\otimes$ 表示 Kronecker 积；$(\cdot)^{*}$ 表示共轭算子；$(\cdot)^{\mathrm{H}}$ 表示共轭转置。比较式(7)和式(1)，z 相当于阵列流型为 $\boldsymbol{A}^{*}\odot\boldsymbol{A}$ 的单快拍接收信号，噪声为一确定性矢量 $\sigma^2 1_n$。

与均匀线列阵的阵列流型 $\boldsymbol{A}$ 相比，$\boldsymbol{A}^{*}\odot\boldsymbol{A}$ 是通过差分阵元形成的一个大的虚拟阵列，其阵元位于集合 $D=\left\{d_i-d_j,1\leqslant i,j\leqslant L\right\}$ (d_n 表示阵元的位置)。由于阵元位置的差产生出虚拟阵元，并且这些虚拟阵元可能包含了由于阵元失效的失效阵元的位置，那么失效阵元的恢复成为可能。

考虑测量噪声，KR 处理后，经过向量化式(5)得到模型为：

$$\boldsymbol{z}=vec(\hat{\boldsymbol{R}}_{xx})=\left[\boldsymbol{A}^{*}\odot\boldsymbol{A}\right]\boldsymbol{p}+\sigma^2\mathbf{1}_n+\eta \tag{8}$$

式中 $\eta=vec(E)$。对于损伤的均匀线阵而言，该虚拟阵列有可能是不连续的，以 0 为中心找出其中的连续虚拟阵元，将式(8)中的重复行加权平均，按照连续延迟进行重排，可以得到

$$\tilde{\boldsymbol{z}}=\tilde{\boldsymbol{B}}\cdot\boldsymbol{p}+\sigma^2\tilde{\boldsymbol{\omega}}+\tilde{\boldsymbol{e}} \tag{9}$$

重排 η 后得到矢量 $\tilde{\boldsymbol{e}}$，$\tilde{\boldsymbol{e}}$ 只有 1 个元素对应地来自 $\boldsymbol{E}$ 的对角元素，$\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 是中心位置的元素数据为 1，其余均为 0 的一个向量。将接收噪声和测量噪声统一记为 e，则式(9)可以写为：

$$\tilde{\boldsymbol{z}}=\tilde{\boldsymbol{B}}\cdot\boldsymbol{p}+e \tag{10}$$

该模型为一单快拍相干模型，要进行方位估计必须进行解相干处理，该数据 $\tilde{z}$ 为一关于中心互为共轭的单快拍数矢量。

因为 $\tilde{z}$ 为 Hermitian 对称，即 $[\tilde{z}]_1=[\tilde{z}]_{2L+1}^{*}$，因此可以采用如下的数据重构的方式形成 1 个 Teoplitz 矩阵：

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}[\tilde{z}]_L & [\tilde{z}]_{L-1} & \cdots[\tilde{z}]_1\\ [\tilde{z}]_{L+1} & [\tilde{z}]_L & \cdots[\tilde{z}]_2\\ & \vdots & \\ [\tilde{z}]_{2L-1} & [\tilde{z}]_{2L-2} & \cdots[\tilde{z}]_L\end{bmatrix} \tag{11}$$

式中：$L=\left(|\tilde{z}|+1\right)/2$，$|\tilde{z}|$ 表示 $\tilde{z}$ 中元素的个数。目标的方位估计可以通过该矩阵直接计算得到。

2.2 阵元失效情况下的差合作阵恢复分析

一般情况下，阵元失效是指已损坏阵元的输出信号为 0，或是不规则的噪声，或是出现 1 个较大的直流偏差等。本文中的阵元失效是指阵元完全故障，接收不到任何幅度和相位的信息，也就是说失效阵元没有可以利用的任何信息。若是第 i 个阵元失效，那么导向矢量 $\boldsymbol{\alpha}(\varphi)$ 中的 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}d_i\sin(\varphi_k)}$ 将被 0 所替代，表示为 $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{e}}(\varphi)$。在损伤阵列数据进行差合作阵处理以后，这时等价的阵元位置将为：

$$D_{\mathrm{impair}}=\left\{\tilde{d}_m-\tilde{d}_n\right\}=\left\{\tilde{d}_k\right\} \tag{12}$$

式中：$\tilde{d}_m$，$\tilde{d}_n$ 分别为损伤阵列中阵元的位置；D_{impair} 为差合作处理后的虚拟阵元的位置。$\forall m,n=1,2,\cdots,L$；$\forall k=-M+1,-M+2,\cdots,0,\cdots,M-1$。由差合作阵处理，损伤的阵列流型可以表示为式(13)[15]：

$$\boldsymbol{A}_{\text{impair}}^{*}\odot\boldsymbol{A}_{\text{impair}}=[vec(\boldsymbol{a}_{\text{e}}(\varphi_1)\boldsymbol{a}_{\text{e}}^{\text{H}}(\varphi_1)),\cdots,vec(\boldsymbol{a}_{\text{e}}(\varphi_L)\boldsymbol{a}_{\text{e}}^{\text{H}}(\varphi_L))] \tag{13}$$

式中：$\boldsymbol{A}_{\text{impair}}$ 表示没有失效阵元的损伤阵列流型矩阵(实际上失效阵元位置处被 0 所替代)。

差合作处理有如下特点：

1) 当 $\tilde{d}_m=\tilde{d}_n,\forall m,n=1,2,\cdots,M$ 时，$\tilde{d}_k=\tilde{d}_m-\tilde{d}_n=\tilde{0}$；

2) 当 $m\neq n$，$\tilde{d}_k$ 在 D_{impair} 重复多次，即产生冗余；

3) 进行差合作阵处理以后，通过 KR 积处理得到的虚拟阵元，损坏阵元对应的位置可能被重新获取，相应的阵元失效的影响会被消除。

值得注意的是集合 D_{impair} 可以允许重复的虚拟阵元包含第 i 个失效阵元的位置。令 H_{impair} 表示 D_{impair} 中可以区分的位置的集合，并进行排序，那么第 j 个元素 $\left[H_{\text{impair}}\right]_j$ 对应的虚拟阵元在 $(-M+j)d$。这里做如下假定：失效阵元损伤时随机分布的损伤个数不超过 $(L-2)/2$。

通过差合作阵处理，采用协方差向量化方法获取的虚拟阵元对应了失效阵元，这样解决了阵元失效的影响。所以代替使用传统损伤阵元的数据模型(1)，而利用差合作阵处理后的阵列模型(10)，这样做可以消除失效阵元的影响，使用信号功率来代替信号幅度进行 DOA 估计。该模型等效为一个单快拍的相干源估计问题，若采用平滑技术来进行去相干处理，复杂度较高，本文提出采用基于 Toeplitz 矩阵数据重构的方法去相干来进行 DOA 估计。

2.3 算法流程

假定：损伤阵元位置随机分布，损伤个数不超过阵元个数的一半。

步骤 1：采集阵元数据采集 $x_i(t)$；

步骤 2：判断阵元数据长度是否等于阵元个数 L。

If equal

采用传统的子空间类方法进行 DOA 估计。

end

else

根据 $x_i(t)$ 通道数据找出阵元损伤的位置集合，形成差集合，找出连续的差集合。

对数据 $x(t)$ 求采样协方差矩阵，将该矩阵向量化。

从 $\boldsymbol{z}$ 中找出对应的差集合元素对应的值，去冗余，加权平均，排序得到新的向量 $\tilde{\boldsymbol{z}}$。

基于 Teoplitz 矩阵进行数据重构得到 $\tilde{\boldsymbol{R}}$。

采用 MUSIC 算法进行方位估计。

end

程序结束

3 仿真与分析

本节对基于 KR 积阵列自由度恢复方法以及 Toeplitz 矩阵数据重构的高分辨估计方法进行仿真分析，以验证算法的有效性。

实验 1：差合作阵的虚拟阵元分析

在下面所有仿真中均匀线阵阵元个数均为 10 个，且假定阵元损伤数目不超过阵元数目的一半。验证在损伤阵元位置随机出现时，利用 KR 积处理后的差合作阵恢复损伤阵元的可能性。损伤阵元位置随机出现，损伤阵元不出现在阵元两端，这种情况下差合作阵可以完全恢复出完好阵元时的虚拟位置，阵列自由度从 M 提高到 $2(M-1)$，虚拟阵元如图 1(a)所示 。若损伤阵元有 1 个出现在阵列的一端，虚拟阵元如图 1(b)所示。在阵元损伤随机出现的情况下，通过 KR 积处理后产生的差合作虚拟阵能够很好地恢复阵列的自由度。文献[11]是在假设空时数据随机分布的情况下，通过矩阵填充的方式达到恢复阵列的分辨性能，这种假设一般情况下是不能够完全成立的。另外文献[12]是通过逐个时间点接收信号降维处理来恢复阵元缺损，是以降低阵列自由度为前提的，因此与该方法相比，在实现上有很大区别，是在整个观测时间内固定选择部分采样阵元，降维处理成 1 个随机分布的矩阵，在逐个时间快拍上通过矩阵填充来恢复数据，一方面该方法会降低自由度，另一方面逐个时间的矩阵填充计算量也会很大。

实验 2：阵元失效下的 DOA 估计性能分析

实验条件：假定阵列为均匀线列阵，阵元个数为 10 个，阵元间隔为半波长，目标为远场非相干窄带目标，

目标个数为 7 个。噪声为均值为 0，方差为 1 的高斯白噪声，输入信噪比为 10 dB。假设有 2 个等功率的独立非相干信号同时入射到 10 元均匀线列阵中，阵元间距为半波长。

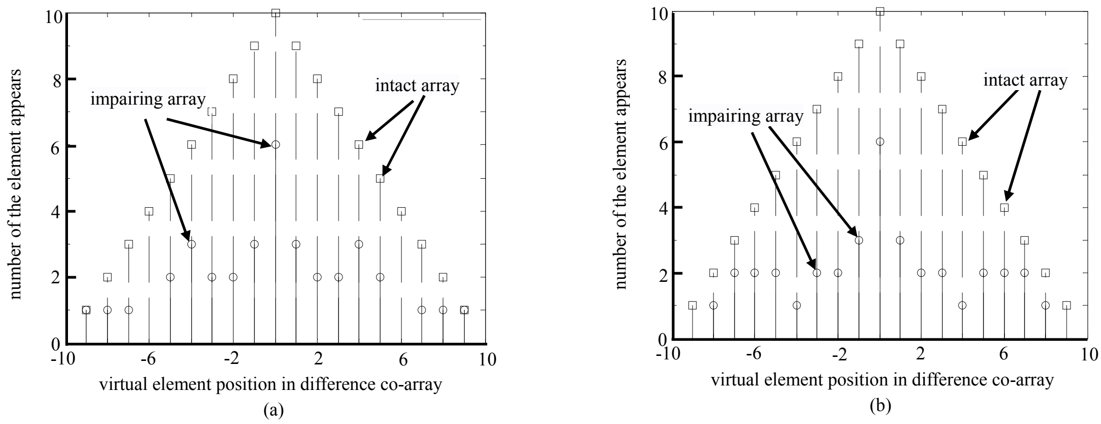

Fig.1 Virtual element position in difference co-array
图 1 差合作阵虚拟阵元位置频数

1) 最小分辨性能比较

其中阵列中有 4 个阵元以随机分布的形式损坏，出现在均匀线列阵中。将目标角度间隔固定为 4°，信噪比固定为 10 dB，快拍数为 100 次，采用平滑 MUSIC 和 Teoplitz 数据重构方法分别对[−90°,90°]空域中以 1°为间隔进行扫描，验证该方法的测向精确度以及最小分辨性能，如图 2 所示。在随机出现 4 个阵元损伤的情况下，采用平滑 MUSIC 和 Teoplitz 数据重构方法的 DOA 估计方法，均能正确估计出目标的方位，而使用之前的线阵，MUSIC 方法已经无法正确估计出目标的方位。

2) 测向偏差与角度分隔的关系

当目标角度间隔从 3°~12°变化时，进行 200 次蒙特卡洛实验，分析 2 个目标的平均测向偏差，如图 3 所示。当两信号间隔逐渐增大时，基于 Teoplitz 数据重构方法的 DOA 估计方法的测向偏差逐渐减小，角度间隔大于 9°时测向偏差近似为零，表明该方法是一种无偏的测向方法。

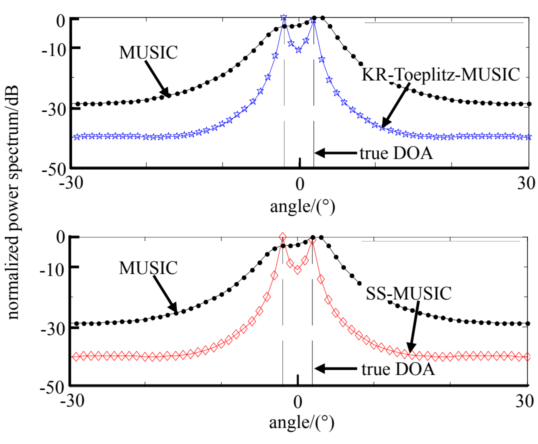

Fig.2 Resolution performance comparison
图 2 最小分辨性能比较

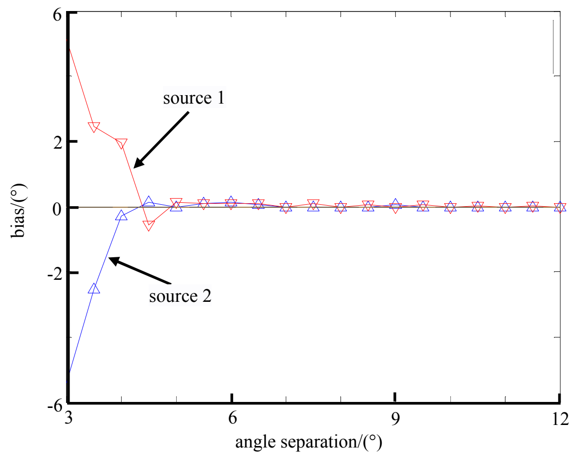

Fig.3 Bias versus angle separation
图 3 测向偏差随信号角度间隔的变化曲线

3) 最小均方误差的比较

固定 2 个等功率的信号的角度间隔为 5°，快拍数为 200 次，其中 4 个阵元随机失效，当信噪比为−10 dB 到 20 dB 变化时，进行 200 次蒙特卡洛实验，采用平滑 MUSIC(记为 KR-SS-MUSIC)和 KR-Toeplitz-MUSIC 来仿真平均测向均方根误差。定义均方根误差(RMSE)为：

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{KM}\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}(\hat{\theta}_k^m - \theta_k^m)^2} \tag{14}$$

式中：M 为给定场景下的蒙特卡洛仿真次数；K 为入射信号个数；$\hat{\theta}_k^m$ 和 θ_k^m 分别为第 m 次试验中第 k 个信号方向的真实值和估计值。

由图 4 可知，2 种方法在信噪比大于 5 dB，均方根误差均约为 1°，随着信噪比的增加，均方根误差也越来越小。但是 KR-Toeplitz-MUSIC 的计算复杂度要小于 KR-SS-MUSIC。

角度间隔固定为 4°，信噪比固定为 5 dB，快拍数从 50 到 500 改变，200 次实验平均测向均方根误差。由图 5 可知，在快拍数为 150 次时，平均测向均方根误差为不到 1°。这里没有与传统 MUSIC 比较，因为阵元损伤情况下，平均测向均方根误差很大，基于平滑处理和基于 Toeplitz 矩阵数据重构的方法能够在理论上具有相同性能，主要是因为在选择连续虚拟阵元的过程中，才用到平均加权处理，仿真也验证了该结果。

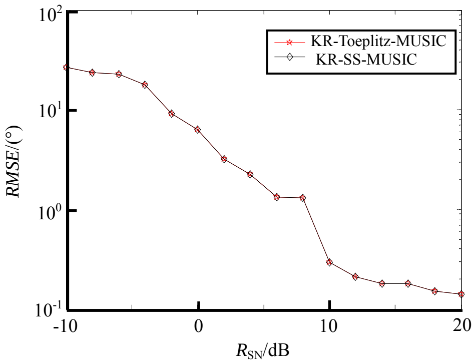

Fig.4 RMSE vs. SNR
图 4 基于信噪比的均方根误差曲线

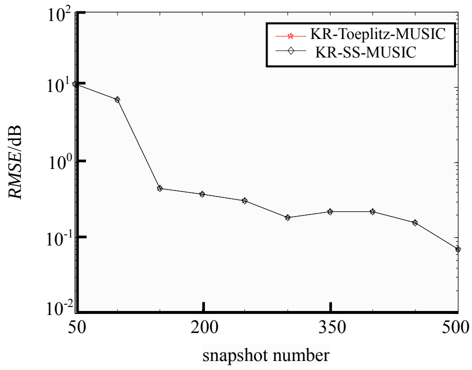

Fig.5 RMSE vs. snapshot
图 5 基于快拍数的均方根误差曲线

4 结论

失效阵列恢复是阵列信号处理中重要的研究内容。针对均匀线列阵中的阵元失效问题，提出基于 Khatri–Rao 积处理的阵列自由度恢复方法，即协方差矢量化技术构建合作阵的接收信号矢量，来达到恢复损伤阵列自由度的目的。利用了差合作阵的概念提高了损伤阵列的自由度，分别采用了平滑技术和 Toeplitz 矩阵数据重构来对等效的相干数据模型进行处理。相比而言，采用 Toeplitz 矩阵数据重构去相干处理计算量低。但是，这 2 种方法都没有充分利用到 KR 积处理后的阵列自由度，如何进一步利用合作阵处理带来的自由度是下一步需要研究的内容，另外阵元损伤的非随机性，也会降低该方法的性能，需要进一步研究和分析。

参考文献:

[1] 朱德智,闫冯军. 均匀线阵阵元缺损对波束方向图影响的分析[J]. 现代电子技术, 2009,32(8):106–108. (ZHU Dezhi, YAN Fengjun. Analysis about impact of uniform linear array defect on beam pattern[J]. Modern Electronics Technique, 2009,32(8):106–108.)

[2] 朱德智,闫冯军. 均匀线阵阵元缺损对目标检测的影响分析[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2009,7(5):398–403. (ZHU Dezhi,YAN Fengjun. Influence of damaged sources of ULA on detection[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2009,7(5):398–403.)

[3] 李铮,张曙. 均匀圆阵阵元缺损对阵列方向图影响的分析[J]. 自动化技术与应用, 2010,29(9):31–39. (LI Zheng, ZHANG Shu. Analysis of the array pattern with defect array element in the uniform circle array[J]. Techniques of Automation and Applications, 2010,29(9):31–39.)

[4] 高飞,陈辉,谢文冲,等. 阵元失效情况下的STAP性能研究[J]. 电子学报, 2009,37(9):2096–2101. (GAO Fei,CHEN Hui, XIE Wenchong,et al. STAP performance research on element failure[J]. Acta Electronica Sinica, 2009,37(9):2096–2101.)

[5] CUI Lin,LI Ya'an. The method research of beamforming with array-element failure[C]// International Conference on Computer,Mechatronics,Control and Electronic Engineering(CMCE). Changchun, China:[s.n.], 2010:111–114.

[6] 徐朝阳,章新华,韩东,等. 阵元失效条件下拖线阵波束形成的优化方法[J]. 系统仿真学报, 2009,21(19):6017–6019. (XU Zhaoyang,ZHANG Xinhua,HAN Dong,et al. Optimized method of beamforming for towed linear arrays in presence of element failure[J]. Journal of System Simulation, 2009,21(19): 6017–6019.)

[7] 杨洋,蔡鹏飞,褚志刚. 阵列形式及阵元失效对统计最优近场声全息重建结果的影响分析[J]. 声学技术, 2014,33(4): 352–358. (YANG Yang,CAI Pengfei,CHU Zhigang. The influence of array geometry and element failure on SONAH reconstruction results[J]. Technical Acoustics, 2014,33(4):352–358.)

[8] 张远彪,朱三文. 有缺陷的多接收阵合成孔径声呐成像技术[J]. 鱼雷技术, 2015,23(4):280–285. (ZHANG Yuanbiao, ZHU Sanwen. Imaging of multi-receiver SAS with Faulty Array Element[J]. Torpedo Technology, 2015,23(4):280–285.)

[9] 徐朝阳,章新华,康春玉. 基于信号重构的阵列失效校准方法[J]. 计算机工程, 2009,35(1):255-256. (XU Zhaoyang, ZHANG Xinhua,KANG Chunyu. Array failure correction method based on signal-reconstruction[J]. Computer Engineering. 2009,35(1):255-256.)

[10] 苏志刚,温宙,刘海涛,等. 基于空频解耦的宽带DOA估计算法[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2013,11(5):765-769. (SU Zhigang,WEN Zhou,LIU Haitao,et al. DOA estimation of wideband signal based on keystone transform[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2013,11(5):765-769.)

[11] YERRISWAMY T,JAGADEESHA S N. Fault tolerant matrix pencil method for direction of arrival estimation[J]. Signal & Image Processing, 2011,2(3):55-67.

[12] 杨东,廖桂生,朱圣棋,等. 阵列信号降采样低秩矩阵的恢复方法[J]. 西安电子科技大学学报, 2014,41(5):30-35. (YANG Dong,LIAO Guisheng,ZHU Shengqi,et al. Improved low-rank recovery method for sparsely sampled data in array signal processing[J]. Journal of Xidian University, 2014,41(5):30-35.)

[13] MA W K,HSIEH T H,CHI C Y. DOA estimation of quasi-stationary signals VIA Khatri−Rao subspace[C]// IEEE International Conference on Acoustics,Speech and Signal Processing(ICASSP). Taipei,China:[s.n.], 2009:2165-2168.

[14] MA W K,HSIEH T H,CHI C Y. DOA estimation of quasi-stationary signals with less sensors than sources and unknown spatial noise covariance: a Khatri-Rao subspace approach[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010,58(4):2168-2180.

[15] ZHU C,WANG W,CHEN H,et al. Impaired sensor diagnosis, beamforming and DOA estimation with difference co-array processing[J]. IEEE Sensors Journal, 2015,15(7):773-780.

作者简介:

谭伟杰(1981-),男,陕西省合阳县人,在读博士研究生,主要研究方向为阵列信号处理、声源定位与成像.email:tanweijie@hotmail.com.

冯西安(1962-),男,陕西省户县人,教授,博士生导师,主要研究方向为信号与信息处理.

张杨梅(1982-),女,西安市人,在读博士研究生,主要研究方向为水下目标探测与识别.

(上接第 28 页)

[7] WANG Y,MINAMIDE H,TANG M,et al. Study of water concentration measurement in thin tissues with terahertz-wave parametric source[J]. Optics Express, 2013,18(15):15504-15512.

[8] WANG Y Y,NOTAKE T,TANG M,et al. Terahertz-wave water concentration and distribution measurement in thin biotissue based on a novel sample preparation[J]. Physics in Medicine and Biology, 2011,56(14):4517-4518.

[9] 杨航,赵红卫,张建兵,等. 生物组织脱水过程的太赫兹时域光谱[J]. 红外与毫米波学报, 2014,33(3):263-267. (YANG Hang,ZHAO Hongwei,ZHANG Jianbing,et al. The dehydration processes of biological tissues investigated by terahertz time-domain spectroscopy[J]. Journal of Infrared and Millimeter Waves, 2014,33(3):263-267.)

[10] YANG Yuping,LEI Xiangyun,YUE Ai,et al. Temperature-dependent THz vibrational spectra of clenbuterol hydrochloride[J]. Science China:Physics, Mechanics & Astronomy, 2013,56(4):713-717.

[11] CECILIE Ronne,LARS Thrane,PER-OLOF Astrand,et al. Investigation of the temperature dependence of dielectric relaxation in liquid water by THz reflection spectroscopy and molecular dynamics simulation[J]. Journal of Chemical Physics, 1997,107(14):5319-5331.

作者简介:

马　品(1991-),女,河北省保定市人,在读硕士研究生,主要研究方向为太赫兹光谱表征.email:1511676741@qq.com.

杨玉平(1976-),女,山东省德州市人,副教授,硕士生导师,主要研究方向为太赫兹光谱与成像.email:ypyang_cun@126.com.