文章编号：2095-4980(2021)06-1002-07

一种基于协方差矩阵重构的波束形成算法

阳　辉[1]，刘湘伟[1]，嵇海祥[2]，夏　翔[*2]

(1.西藏自治区水文水资源勘测局，西藏 拉萨 850000；2.水利部南京水利水文自动化研究所，江苏 南京 210044)

摘　要：针对 Capon 波束形成在误差条件下敏感性问题，提出一种基于协方差矩阵重构的鲁棒波束形成算法。算法将信号集中出现的空域划分为干扰区域和信号区域，接着将两个区域划分为若干相互独立不重叠的部分，对干扰区域积分，构造出干扰协方差矩阵；再利用采样协方差矩阵特征分解后的最小特征值重构出噪声协方差矩阵；最后对期望信号导向矢量误差进行环不确定集建模，并在期望信号导向矢量环不确定集上进行 Capon 谱积分来估计期望信号协方差矩阵，根据其主特征矢量获取期望信号导向矢量。仿真表明，与传统鲁棒波束形成算法相比，此方法在不同快拍数以及输入信噪比条件下，性能更加优异且稳定，同时计算量较小。

关键词：协方差矩阵重构；自适应波束形成；导向矢量估计；鲁棒性

中图分类号：TN911.7　　**文献标志码：**A　　**doi：**10.11805/TKYDA2020095

Beamforming algorithm based on covariance matrix reconstruction

YANG Hui[1]，LIU Xiangwei[1]，JI Haixiang[2]，XIA Xiang[*2]

(1.Hydrology and Water Resources Survey Bureau of Tibet Autonomous Region，Lasa Tibet 850000，China；2.Nanjing Institute of Water Conservancy and Hydrology Automation，Ministry of Water Resources，Nanjing Jiangsu 210044，China)

Abstract：A robust beamforming algorithm based on covariance matrix reconstruction is proposed to solve the sensitivity problem of Capon beamforming under error condition. The algorithm divides the spatial domain of the signal set into interference region and signal region, and then divides the two regions into several independent and non-overlapping parts. The interference covariance matrix is constructed by integrating the interference region, and then the noise covariance matrix is reconstructed by using the minimum eigenvalue of the sample covariance matrix. Finally, the expected signal guidance vector error is modeled by the ring uncertainty set, and the Capon spectrum integration is performed on the ring uncertainty set to estimate the expected signal covariance matrix, and the expected signal guidance vector is obtained according to its main eigenvector. Simulation results show that compared with the traditional robust beamforming algorithm, the performance of this method is more excellent and stable under the conditions of different snapshot numbers and input Signal-to-Noise Ratio(SNR). At the same time, it bears the advantage of low computation.

Keywords：reconstruction of covariance matrix；adaptive beamforming；guidance vector estimation；robustness

自适应波束形成作为阵列信号处理的主要分支之一，广泛应用在雷达、声纳、无线通信等领域[1-3]。导向矢量精确情况下，自适应波束形成器实际是一种输出信干噪比最大准则下的空域滤波器。然而工程应用中，尤其是水下声纳信号处理中，信号协方差矩阵通过采样信号获取，其中往往包含期望信号，此外，来波方向不确定以及导向矢量随机误差都会引起自适应波束形成性能急剧下降[4]。为了提高自适应波束形成稳定性，近年来一系列的鲁棒波束形成[5-8]算法相继被提出。现有的传统鲁棒自适应波束形成(Robust Adaptive Beamforming，RAB)算法显著提高了阵列失配情况下的鲁棒性，如对角加载波束形成(Diagonal Loading Beamforming，DLB)利用加权因子合成后的协方差矩阵代替原有的样本协方差矩阵，提高了算法的抑制噪声性能。最差性能最优波束形成

收稿日期：2020-03-11；**修回日期：**2020-05-12

[*]**通信作者：**夏　翔　email:15751837579@163.com

(Worst-Case Optimal Beamforming，WCOB)对导向矢量随机误差中最差情况进行优化，从而使得其他任何误差情况都比此情况优异，以此保证了面对期望信号导向矢量误差时算法的鲁棒性。然而这类算法自身存在一些固有缺点，如难以确定对 DLB 算法的最优加载因子，WCOB 算法的误差上界难以界定等等，这些缺点使得算法性能仍离目标最优性能较远。文献[9]提出一种干扰加噪声协方差矩阵(Interference-Plus-Noise Covariance Matrix，IPNCM)重构思想，根据阵列信息采用来波方向估算方法将来波方向分成两个子区间：包含期望信号的区间以及包含所有干扰信号的区间。此方法可以获得较高精确度的期望信号导向矢量，大大减弱信号“自消”现象，适用于来波方向不确定情况。然而根据文献[8]可知，该方法除了计算量大之外，由于算法过度依赖 IPNCM，实际上算法重构的 IPNCM 与理想 IPNCM 之间存在内在区别，因此导致算法性能下降。文献[10]提出一种将干扰信号导向矢量失配建模为环不确定集，通过来波方向估计确定干扰信号来波方向角度区间的算法。该算法很好地解决了导向矢量失配情况下波束形成鲁棒性问题，在高输入信噪比(SNR)时接近最优输出信干噪比(Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio，SINR)。然而在计算导向矢量时引入的凸优化方法导致算法计算量颇大，同时在输入 SNR 较低时，输出 SINR 严重偏离最优情况，低于最差性能最优化(Worst-Case Performance Optimization，WCPO)算法、鲁棒 Capon 波束形成(Robust Capon Beamforming，RCB)算法。除此以外，文献[11–13]将波束形成加权值求解当作寻优问题，利用一些专门寻优工具解决二次规划二次约束问题，此类算法可在低信噪比环境中有较好性能表现，但寻优带来的巨大计算量使这类波束形成难以在工程实际中应用。

为了应对导向矢量随机误差，进一步提高波束形成算法鲁棒性，提出了一种基于导向矢量不确定集的 IPNCM 重构鲁棒波束形成算法。算法利用 MUSIC 算法预估出信号集中出现的区域，分别划分出干扰信号区域与期望信号区域。首先对干扰信号区域积分，得到干扰协方差矩阵，根据采样协方差矩阵的最小特征值得到噪声功率，重构出精确的干扰加噪声协方差矩阵。同时利用环不确定集对期望信号导向矢量随机误差建模，并在期望信号导向矢量环不确定集上进行 Capon 谱积分来估计期望信号协方差矩阵，根据其主特征矢量获取期望信号导向矢量，从而在更好地解决导向矢量随机误差同时保持算法鲁棒性。

1 阵列信号模型

考虑阵元数为 M 的均匀线性阵列，入射到阵列的信源相互独立，则第 k 个快拍时接收到的信号为：

$$x(k)=x_{\mathrm{s}}(k)+x_{\mathrm{i}}(k)+x_{\mathrm{n}}(k) \tag{1}$$

式中：$x_{\mathrm{s}}(k)$ 为期望信号成分；$x_{\mathrm{i}}(k)$ 为干扰信号成分；$x_{\mathrm{n}}(k)$ 为独立于信源的高斯白噪声。

阵列接收信号的理想协方差矩阵可表示为：

$$\boldsymbol{R}_x=E\{x(k)x(k)^{\mathrm{H}}\}=\boldsymbol{R}_{\mathrm{s}}+\boldsymbol{R}_{\mathrm{i}}+\sigma_{\mathrm{n}}{}^2\boldsymbol{I} \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{R}_{\mathrm{s}}$ 表示期望信号协方差矩阵；$\boldsymbol{R}_{\mathrm{i}}$ 表示干扰信号协方差矩阵；$\boldsymbol{I}$ 代表单位矩阵；$\sigma_{\mathrm{n}}{}^2$ 代表高斯白噪声的功率；$(\bullet)^{\mathrm{H}}$ 是共轭转置。

自适应波束形成的输出值经过加权因子加权后可表示为

$$y(k)=\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}x(k) \tag{3}$$

式中加权矢量 $\boldsymbol{w}=[w_1,w_2,\cdots,w_M]$，根据最大输出信干噪比无失真准则，得到关于最优权值数学模型为：

$$\min_{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{i+n}}w \quad s.t. \quad \boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}a(\theta)=1 \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{i+n}}$ 为干扰加噪声协方差矩阵，通过拉格朗日乘子法计算权值可得到：

$$w_{\mathrm{opt}}=\frac{R_{\mathrm{i+n}}^{-1}a(\theta)}{a^{\mathrm{H}}(\theta)R_{\mathrm{i+n}}^{-1}a(\theta)} \tag{5}$$

实际的工程应用中，$\boldsymbol{R}_{\mathrm{i+n}}$ 通常用采样协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{s}}$ 来近似表示，K 个快拍的采样协方差矩阵为：

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{s}}=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}x(k)x^{\mathrm{H}}(k) \tag{6}$$

2 本文算法

由于使用采样协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{s}}$ 代替干扰加噪声协方差矩阵时，快拍数和期望信号导向矢量等因素会引起波束形成性能急剧下降，因此考虑重构精确的干扰加噪声协方差矩阵[14]。

2.1 干扰加噪声协方差矩阵重构

文献[8]将全空域分为期望信号出现的区域及其补集，并对补集上能量进行积分求得干扰加噪声协方差矩阵。然而信号只分布在空域的少部分空间，此方法在增加计算量的同时降低了干扰加噪声协方差矩阵的精确度。实际空间能量主要分布在真实导向矢量附近，利用 MUSIC 算法预估出干扰信号集中出现的区域，将此区域定义为 $H-1$ 个相互独立不重叠的干扰出现的子区域 $\theta_{j(h)}$，$h=1,2,\cdots,H-1$，对 $\theta_{j(h)}$ 区域能量积分可降低运算量且提高干扰加噪声协方差矩阵精确度。

干扰协方差矩阵可表示为：

$$\overline{\boldsymbol{R}}_j=\sum_{h=1}^{\mathrm{H}-1}\int_{\theta_{j(h)}}\frac{a(\theta)a^{\mathrm{H}}(\theta)}{aH(\theta)\overline{R}^{-1}a(\theta)}\mathrm{d}\theta \tag{7}$$

定义 Δ_h 为第 h 个干扰信号，入射角度中心为 $\overline{\theta}_h$，则上式面积分问题可由角度积分表示为：

$$\overline{\boldsymbol{R}}_j=\sum_{h=1}^{\mathrm{H}-1}(\int_{-\Delta_q/2}^{\Delta_q/2}\frac{a(\overline{\theta}_q+\phi)a^{\mathrm{H}}(\overline{\theta}_q+\phi)}{a^{\mathrm{H}}(\overline{\theta}_q+\phi)\overline{R}^{-1}a(\overline{\theta}_q+\phi)})\mathrm{d}\phi \tag{8}$$

为了求解上述积分，采用网格法将空间划分为网格，计算网格上点的和，可将上式表示为

$$\overline{\boldsymbol{R}}_j=\sum_{h=1}^{\mathrm{H}-1}(\frac{1}{N+1}\sum_{k=-N/2}^{k=N/2}\frac{a(\overline{\theta}_h+k\Delta_h/N)a^{\mathrm{H}}(\overline{\theta}_h+k\Delta_h/N)}{a^{\mathrm{H}}(\overline{\theta}_h+k\Delta_h/N)\overline{R}^{-1}a(\overline{\theta}_h+k\Delta_h/N)}) \tag{9}$$

式中 N 表示划分网格个数，数值可以根据区域大小以及波束宽度进行调整。

对于噪声协方差矩阵，可由采样协方差矩阵特征分解后的最小特征值计算得到噪声功率，公式如下：

$$\sigma_n=\frac{1}{M-L}\sum_{m=L+1}^{M}\lambda_m \tag{10}$$

式中：M 表示阵元数；L 表示干扰信号数。由此，得到的干扰加噪声协方差矩阵可表示为：

$$\overline{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{i+n}}=\overline{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{i}}+\sigma_{\mathrm{n}}{}^2I \tag{11}$$

2.2 导向矢量估计

文献[10]通过求解二次约束二次规划(Quadratical Constraint Quadratical Programming，QCQP)优化问题获得期望信号导向矢量，为了避免优化问题带来的巨大计算量，提出一种基于环不确定集的导向矢量估计方法。与重构干扰加噪声协方差矩阵相似，先将 $L-1$ 个期望信号 Θ 所在区域划分为 $L-1$ 个互不相叠的小角度子区间 Θ (l=2,3,⋯,L)，每个子区间包含一个期望信号，即 $\Theta=\Theta_1\cup\Theta_2\cup\ldots\cup\Theta_L$，则可用圆不确定集表示如下：

$$S_{a-1}(\theta)=\left\{a_l(\theta)\,|\,\|\overline{a}_l(\theta)-a_l(\theta)\|_2\leqslant\varepsilon_l,\theta\in\Theta_l\right\} \tag{12}$$

式中：ε_l 为常数，用于表示范数约束；$\overline{a}_l(\theta)$ 为在假设期望信号子区间内的导向矢量，对该导向矢量进行范数归一化后为：

$$\|\overline{a}_l(\theta)\|_2=\sqrt{M} \tag{13}$$

将上述期望信号的所有圆不确定集构造在一起形成环不确定集，可用下式表示：

$$S_{a-1}(\theta\in\Theta_l)=\left\{a_l(\theta)\,|\,\|\overline{a}_l(\theta)-a_l(\theta)\|_2\leqslant\varepsilon_l,\theta\in\Theta_l\right\} \tag{14}$$

则期望信号协方差矩阵由 Capon 谱积分可得到为：

$$C_s=\int_{S_{a-l}(\theta\in\Theta_l)}\frac{a_l(\theta)a_l{}^{\mathrm{H}}(\theta)}{a_l{}^{\mathrm{H}}(\theta)\overline{R}_x{}^{-1}a_l(\theta)}\mathrm{d}v \tag{15}$$

由于积分求解运算量较大，此处采用近似处理，具体做法是先用环不确定集面积分近似代替其体积分，再用二重积分近似代替面积分，最后用离散求和近似代替二重积分，最终可得到信号协方差矩阵近似为：

$$C_s\approx\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{P_l}\sum_{q=1}^{Q_l}\frac{a_{l-q}(\theta_p)a_{l-q}{}^{\mathrm{H}}(\theta_q)}{a_{l-q}{}^{\mathrm{H}}(\theta_p)\overline{R}_x{}^{-1}a_{l-q}(\theta_p)} \tag{16}$$

式中：P_l 指角度区间 $\Theta_l=\left\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{P_l}\right\}$ 离散处理后角度区间中离散值的个数；Q_l 表示角度 $Q_l=(l=1,2,\cdots,l)$ 对应的不确定子集 $S_{a-l}(\theta_p)$ 表面离散化后点的个数。

采用特征值分解的方法减少由上述近似带来的误差，即：

$$C_s=\sum_{m=1}^{M}\gamma_{l-m}\boldsymbol{b}_{l-m}\boldsymbol{b}_{l-m}{}^{\mathrm{H}} \tag{17}$$

式中：γ_{l-m} 为信号协方差矩阵特征分解后的特征值，特征值按降序排列；$\boldsymbol{b}_{l-m}$ 为相应特征值对应的特征向量。

信号协方差矩阵分解后的特征向量构成的信号子空间包含了所有真实期望信号导向矢量，且与最大特征值对应的特征向量最相关，故在考虑范数约束的同时，期望信号导向矢量可表示为：

$$\bar{\boldsymbol{a}}(\theta_l)=\sqrt{M}b_{l-1} \tag{18}$$

根据式(11)与式(18)得到的干扰加噪声协方差矩阵以及期望信号导向矢量可知波束形成最优权值为：

$$W=\frac{\bar{\boldsymbol{R}}_{i+n}{}^{-1}\bar{\boldsymbol{a}}(\theta_l)}{\bar{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{H}}(\theta_l)\bar{R}_{i+n}{}^{-1}\bar{\boldsymbol{a}}(\theta_l)} \tag{19}$$

算法主要步骤如下：

初始化：接收信号数据 $x(k)$

1) 根据式(9)计算得到干扰协方差矩阵 R_{i}；

2) 对采样协方差矩阵特征分解，得到噪声功率 σ_{n}，结合上步得到干扰加噪声协方差矩阵 $R_{\mathrm{i+n}}$；

3) 对期望信号导向矢量误差建立环不确定集得到 $S_{a-l}(\theta\in\Theta_l)$；

4) 由 Capon 谱积分方法求解期望信号协方差矩阵，经过特征分解后得到期望信号导向矢量 $\bar{\boldsymbol{a}}(\theta_l)$；

5) 结合第(2)步与第(4)步的 $R_{\mathrm{i+n}}$ 与 $\bar{\boldsymbol{a}}(\theta_l)$，根据式(19)可计算得到波束形成的最优权值 W。

3 仿真实验

为了验证算法优势，将利用若干仿真实验展示算法性能。仿真条件：假设一维等间距线阵由 M=16 个阵元组成，阵元之间间距 d 为波长 λ 的一半，阵列接收到的信号为远场窄带信号，其中一个为期望信号 $\bar{\theta}_1$=80°，两个干扰信号为 $\bar{\theta}_2$=60° 和 $\bar{\theta}_3$=105°，干噪比 INR 为 20 dB。噪声为零均值的高斯白噪声，每次仿真进行 200 次蒙特卡罗实验。

具体参数设置如下：所有信源范数约束设置为 $\varepsilon_l=0.5$，期望信号来波方向区间为 $\Theta_1=\bar{\theta}_1+\left[-5^\circ,5^\circ\right]$，同样干扰信号来波方向区间为 $\Theta_2=\bar{\theta}_2\left[-5^\circ,5^\circ\right]$ 和 $\Theta_3=\bar{\theta}_3\left[-5^\circ,5^\circ\right]$，均匀离散化角度间间隔为 $\Delta\theta=0.5^\circ$，故 3 个离散化后的角度区间上的角度值个数 $P_1=P_2=P_3=21$，同时不确定集表面上包含的点个数可以设置为 $\theta_l=1\ 024$。

由于本文算法是解决导向矢量随机误差问题，因此本处考虑的误差为阵列结构失真和阵列校正误差[15−16]等因素引起的导向矢量随机误差。可将导向矢量随机误差建模为：

$$\partial_{el}=\frac{\xi_l}{\sqrt{M}}\left[\exp(\mathrm{j}\phi_{l-1}),\exp(\mathrm{j}\phi_{l-2}),\ldots,\exp(\mathrm{j}\phi_{l-M})\right]^{\mathrm{T}} \tag{20}$$

式中：ξ_l 为误差的范数约束；ϕ_{l-M} 表示区间[0,2π]上均匀分布的随机相位。

本次实验中，本文算法主要与文献[10]算法、DLB 以及 WCOB 方法进行对比。

1) 仿真实验 1：验证算法在低 SNR 环境下的性能。设定干扰信号分别来自 70°和 105°，期望信号来自 78°，快拍数为 100，输入 SNR 为−20 dB，可得到低信噪比环境下几种算法的波束图如图 1 所示。

由图 1 可见，本文算法波束旁瓣更低，波束指向精确，对干扰信号也保持了良好的抑制效果。文献[10]算法性能较为稳定，各项指标均未出现下降情况。DLB 算法会出现部分旁瓣升高现象，WCOB 算法则会出现性能明显下降情况。

2) 仿真实验 2：验证高 SNR 情况下几种算法性能。同样设干扰信号来波方向为 70°和 105°，期望信号来波方向为 78°，快拍数为 100，输入 SNR 为 50 dB，可得到高信噪比环境中几种算法波束图如图 2 所示。

从图 2 可以看出，本文算法在波束指向、旁瓣高度以及对干扰抑制效果较好，并无明显性能下降情况发生。文献[10]算法出现了抑制期望信号现象并伴随着高旁瓣，DLB 算法波束指向产生偏差，WCOB 算法则出现性能急剧下降现象。

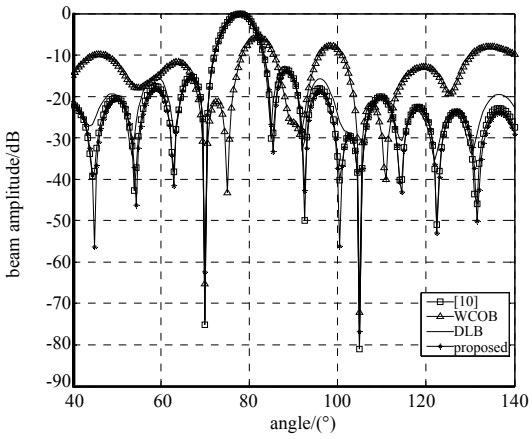

Fig.1 Beam patterns of several algorithms in low SNR
图 1 低信噪比下几种算法的波束图

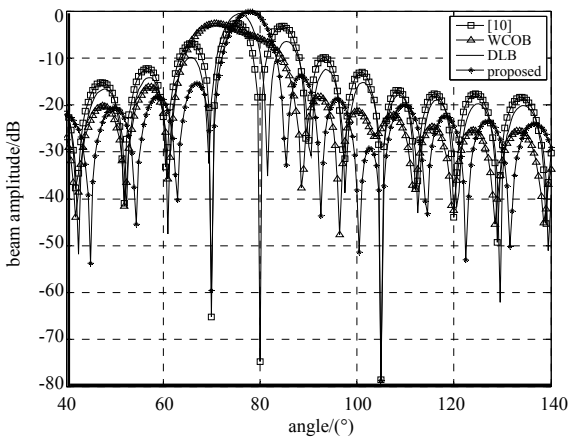

Fig.2 Beam patterns of several algorithms in high SNR
图 2 高信噪比下几种算法的波束图

3) 仿真实验 3：当快拍数为 100 时，几种算法性能随输入 SNR 的变化规律如图 3 所示。从图 3 与图 4 可以看出，输入 SNR 较小时，尤其是输入 SNR 低于 5 dB 时本文算法输出 SINR 高于其他 3 种算法。输入 SNR 较高时，本文算法输出 SINR 低于文献[10]算法的输出 SINR，但高于 DLB 以及 WCOB 算法并趋于稳定。文献[5]算法表现较为稳定，整体趋势略低于文献[10]。由此可见，本文算法通过精确缩减干扰信号出现空间，重构精确的干扰加噪声协方差矩阵，使得算法在全局拥有更优异的性能。

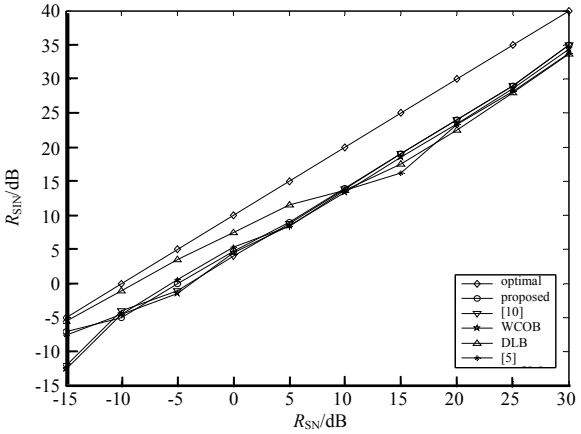

Fig.3 Comparison of output SINR of several algorithms vs. input SNR
图 3 几种算法输出 SINR 随输入 SNR 变化对比

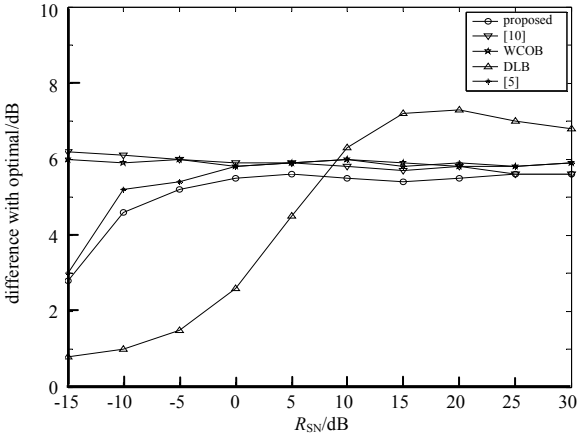

Fig.4 Figure of difference from optimal output SINR vs. input SNR
图 4 与最优输出 SINR 之差随输入 SNR 变化图

从图 5 可以看出，本文算法收敛速度较快，并且收敛接近最优输出 SINR。除此外，文献[10]算法收敛速度较快，但输出 SINR 比本文算法略低，DLB 和 WCOB 算法的收敛速度较慢，且输出 SINR 相对较低。文献[5]算法性能略低于本文算法，整体趋势较为稳定。这表示本文算法快拍数较少，能保持较高、较稳定的输出 SINR，拥有良好的鲁棒性。

4) 仿真实验 4：干扰信号导向矢量范数约束 ε_l，会造成环不确定集 $S_{a-l}(\theta \in \Theta_l)$ 不同，故实验 6 研究范数约束 ε_l 的变化对算法性能的影响。设置期望信号输入 SNR 为 20 dB，快拍数为 100，文献[10]与本文算法范数约束上界与输出 SINR 的变化关系如图 6 所示。由图 6 可见，本文算法输出 SINR 随误差范数约束上界变化表现平稳，与文献[10]相比，更接近最优 SINR。

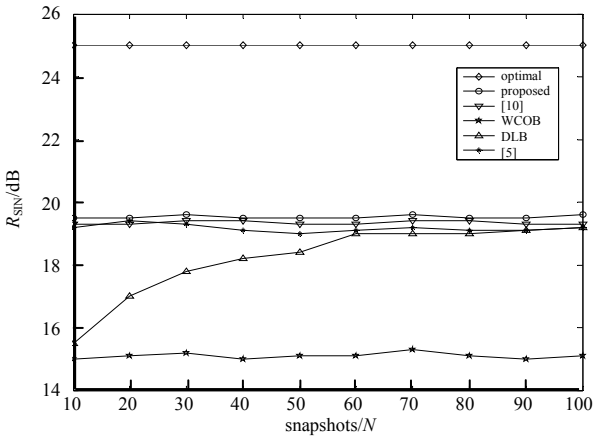

Fig.5 Relationship between the output SINR of several algorithms and the number of snapshots

图 5 几种算法输出 SINR 随快拍数变换关系

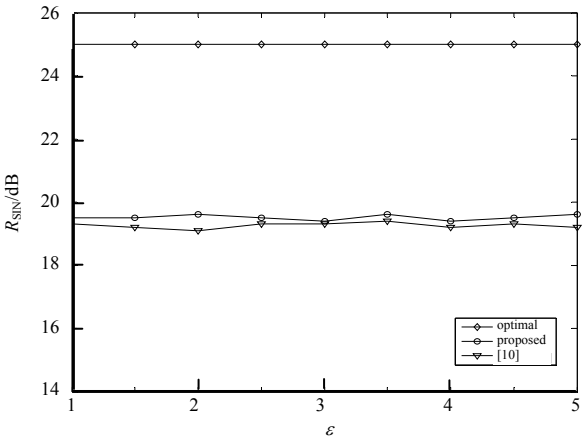

Fig.6 Output SINR vs. error norm constraint

图 6 输出 SINR 随误差范数约束变化

4 结论

为了提高波束形成算法对抗导向矢量随机误差的鲁棒性，同时尽可能让算法接近最优性能，将重构干扰加噪声协方差矩阵与环不确定集思想相结合，提出了针对导向矢量随机误差的鲁棒波束形成算法。算法尽量剔除了样本协方差矩阵中的期望信号成分，保持在高信噪比时算法性能稳定，期望信号导向矢量的估计方法不依赖于干扰加噪声协方差矩阵，保证了算法在低输入 SNR 环境下不需知道阵列先验信息。从计算量角度看，本文算法计算量主要来自干扰加噪声协方差矩阵重构，计算复杂度约为 $O(LM^3)$，与需要借助优化软件的算法相比，运算量大大降低，适用于工程实际。

参考文献：

[1] YANG L,MCKAY M R,COUILLET R. High-dimensional MVDR beamforming:optimized solutions based on spiked random matrix models[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2018,66(7):1933-1947.

[2] 周荣艳,李孟,谭伟杰. 基于嵌套阵列的稀疏表示稳健波束形成方法[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2019,17(3):462-468. (ZHOU Rongyan,LI Meng,TAN Weijie. Robust beamforming with sparse representation based on nested array[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2019,17(3):462-468.)

[3] SHEN F,CHEN F,SONG J. Robust adaptive beamforming based on steering vector estimation and covariance matrix reconstruction[J]. IEEE Communications Letters, 2015,19(9):1636-1639.

[4] MOHAMMADZADEH S,KUKRER O. Robust adaptive beamforming based on covariance matrix and new steering vector estimation[J]. Signal Image and Video Processing, 2019,10(8):131-157.

[5] ZHANG Z,LIU W,LENG W,et al. Interference-plus-Noise covariance matrix reconstruction via spatial power spectrum sampling for robust adaptive beamforming[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2016,23(1):121-125.

[6] DENG Zhenghong,XU Jiwei,LI Xueqiang,et al. Robust adaptive beamforming optimization method based on diagonal-loading and MSE criterion[J]. Chaos,Solitons and Fractals: the Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science,and Nonequilibrium and Complex Phenomena, 2018,108(7):344-695.

[7] SERRA J,MONTSE Nájar. Asymptotically optimal linear shrinkage of sample LMMSE and MVDR filters[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014,62(14):3552-3564.

[8] GU Y,GOODMAN N A,HONG S,et al. Robust adaptive beamforming based on interference covariance matrix sparse reconstruction[J]. Signal Processing, 2014,96(1):375-381.

[9] LI X,WANG D W,MA X,et al. Robust adaptive beamforming using iterative variable loaded sample matrix inverse[J]. Electronics Letters, 2018,54(9):546-548.

[10] HUANG L,ZHANG J,XU X,et al. Robust adaptive beamforming with a novel interference-plus-noise covariance matrix reconstruction method[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015,63(7):1643-1650.

[11] GONG X,HONG L,HAO Y,et al. Robust amplify-and-forward relay beamforming for security with mean square error constraint[J]. Iet Communications, 2015,9(8):1081-1087.

(下转第 1013 页)