

文章编号: 2095-4980(2024)03-0345-08

## 稀疏 L 型阵中基于压缩感知的角度估计方法

苏 龙, 谷绍湖, 邓桂萍

(湖南省飞机维修工程技术研究中心, 湖南 长沙 410124)

**摘 要:** 利用二级 Nested 阵来构建稀疏 L 型阵列, 针对此阵列, 提出了基于压缩感知的角度估计方法。该方法通过计算接收数据的自相关协方差矩阵并向量化, 然后进行重排序和去冗余, 得到虚拟阵列的入射角信息。该虚拟阵列的长度远远大于实际物理阵列的长度, 因而相比同物理阵列的均匀 L 型阵, 阵列孔径和自由度明显增大。最后利用正交匹配追踪技术对虚拟阵列的  $l_1$  范数约束问题进行求解, 并完成二维角度的配对。计算机仿真表明, 所提算法具有更高的信源分辨力, 并且在高信噪比、高快拍数、大角度间隔条件下, 具有更好的估计性能。

**关键词:** 稀疏 L 型阵; 虚拟阵列; 压缩感知; 正交匹配追踪算法

中图分类号: TN911.7

文献标志码: A

doi: 10.11805/TKYDA2022033

## Angle estimation method based on compressed sensing in sparse L-shaped array

SU Long, GU Shaohu, DENG Guiping

(Hunan Aircraft Maintenance Engineering Technology Research Center, Changsha Hunan 410124, China)

**Abstract:** A two-level Nested array is employed to construct a sparse L-shaped array. For this array, an angle estimation method based on compressed sensing is proposed. This method calculates the autocorrelation covariance matrix of the received data and quantizes it, and then reorders and removes the redundancy to obtain the incidence angle information of the virtual array. The length of the virtual array is much larger than that of the actual physical array, so compared with the uniform L-shaped array with the same physical array element, the array aperture and degree of freedom have been greatly improved. Finally, the orthogonal matching pursuit technique is adopted to solve the  $l_1$  norm constraint problem of the virtual array. Computer simulation shows that the proposed algorithm has higher source resolution and better estimation performance under the conditions of high signal-to-noise ratio, high snapshot number and large angle interval.

**Keywords:** sparse L-matrix; virtual array; compressed sensing; orthogonal matching pursuit algorithm

波达方向(Direction Of Arrival, DOA)估计是阵列信号处理中的一个分支, 它在雷达预警、移动通信、声纳警报、地震监测、无线电导航等领域得到了迅速发展与广泛应用<sup>[1]</sup>。传统的一维 DOA 估计研究较早, 其结构简单, 算法复杂度低, 性能优良, 取得了标志性的研究成果, 比如多重信号分类(Multiple Signal Classification, MUSIC)算法<sup>[2]</sup>、旋转不变性的信号参数估计(Estimation of Signal Parameters Via Rotational Invariance Techniques, ESPRIT)算法<sup>[3]</sup>、子空间拟合算法<sup>[4]</sup>、高阶累积量算法<sup>[5]</sup>等。然而实际应用中, 人们更多地需要对空域范围内的目标进行二维 DOA 估计。一般而言二维 DOA 估计阵列结构不能直接照搬一维 DOA 估计的阵列结构, 需要经过重新设计, 比如使用双平行阵列<sup>[6-7]</sup>、L 型阵列<sup>[8]</sup>、圆型阵列<sup>[9]</sup>、平面阵列<sup>[10-11]</sup>、嵌套阵列<sup>[12]</sup>等, 这些阵列结构的阵元一般是均匀线性分布的。 $N$  个均匀线性分布的阵元最多可以检测  $N-1$  个目标信号, 因而自由度较低, 并且阵元间距较小, 阵元之间由于电磁效应而相互耦合, 影响了阵列的方向矩阵, 导致实际 DOA 估计结果不尽人意。近年来稀疏阵列作为一种特殊的阵列结构, 阵元间距大于半波长, 阵元耦合效应较小, 并且可以生成虚拟阵列, 阵列自

收稿日期: 2022-02-11; 修回日期: 2022-04-02

基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目(2020JJ7083)

由度得到增加，因而得到了研究者的广泛关注与研究。

文献[13]利用平行稀疏互质阵列对二维角度进行估计，通过生成协方差矩阵和互协方差矩阵来构造具有二维角度信息的扩展矩阵，然后借助奇异值分解技术以及旋转不变技术估计出二维角度。文献[14]针对 Nested 稀疏阵列提出了矩阵重构旋转不变测向法，能够重构出多个虚拟阵列的协方差矩阵，然后利用旋转不变性估算出入射信号的方向。该方法能够将入射信号个数多于阵元数的目标估算出来。文献[15]提出了分布式 Nested 稀疏阵列，该方法基于 Khatri-Rao 运算，首先对接收的数据进行协方差运算并且向量化，然后引入空间平滑技术恢复协方差矩阵的秩，最后再通过成熟的 ESPRIT 算法得到入射信号的角度。文献[16]基于稀疏互质阵列提出了不需要进行谱峰搜索的算法，因而算法复杂度较低，其基本思想是利用子空间投影技术消除了角度模糊。文献[17]提出了平行互质稀疏阵列的二维角度估计方法，其基本思想是从两子阵列接收数据的互相关矩阵中构造一个虚拟阵列，然后利用虚拟阵元位置集合所获得的数据，通过求解  $l_1$  范数对角度进行估计。

本文提出一种稀疏 L 型阵中基于压缩感知的二维角度估计方法。首先需要确定入射信号的自相关协方差矩阵并进行向量化；其次通过虚拟阵列重建得到虚拟阵元位置集合；再者依据虚拟阵元位置集合对向量化的自相关协方差矩阵进行重排序和去冗余，得到虚拟阵列入射信息；最后利用压缩感知中的正交匹配追踪 (Orthogonal Matching Pursuit, OMP) 算法将单快拍信号扩展为稀疏信号进行二维角度估计。因该虚拟阵列的长度远大于实际物理阵列的长度，所以可以获得更大的阵列孔径和较高的自由度。实验结果表明该方法在估计精确度和分辨力上也更具有优势。

### 1 稀疏 L 型阵列模型

如图 1 所示，稀疏 L 型阵列的 2 个子阵均由 Nested 阵构造而成，分别置于  $x$  轴和  $y$  轴上。图中所用的 Nested 阵实际上是一个二级 Nested 阵结构，即通过二级均匀线阵串联而成。设定第 1 级均匀线阵的阵元间距是  $d_1$ ，阵元数为  $N$ ；设定第 2 级均匀线阵的阵元间距是  $d_2$ ，阵元数为  $M$ ，并且满足  $d_2=(N+1)d_1$ 。如果以坐标原点为参考点，那么该结构的阵元位置坐标集合为  $L = \{nd_1|0 \leq n \leq N-1\} \cup \{Nd_1+m(N+1)d_1|0 \leq m \leq M-1\}$ 。

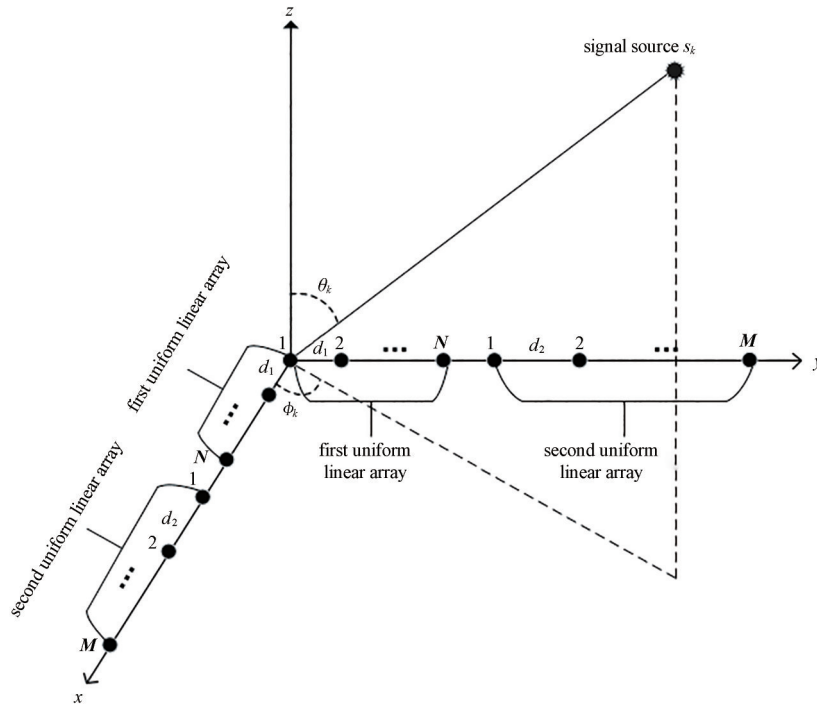


Fig.1 Sparse L-shaped array  
图 1 稀疏 L 型阵列

设有  $K$  个非相干窄带远场信号  $\{s_k\}_{k=1}^K$  入射该阵列，第  $k$  个信号的入射方向可描述为  $(\phi_k, \theta_k)$ ， $\phi_k$  和  $\theta_k$  是入射信号的方位角和俯仰角。定义空间合成角度  $(v_k, u_k)$ ，其中  $v_k \triangleq \sin \theta_k \cos \phi_k$ ， $u_k \triangleq \sin \theta_k \sin \phi_k$ ，设入射信号的波长为  $\lambda$ ，则  $x$  轴的  $N+M$  个阵元所对应的方向矩阵为  $A_x = [a_x(v_1), a_x(v_2), \dots, a_x(v_K)]$ ， $a_x$  为轴阵列的方向向量。具体表达式为：

$$\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(N-1)d_1v_1} & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(N-1)d_1v_2} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(N-1)d_1v_k} \\ e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}Nd_1v_1} & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}Nd_1v_2} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}Nd_1v_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(MN+M-1)d_1v_1} & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(MN+M-1)d_1v_2} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(MN+M-1)d_1v_k} \end{bmatrix} \quad (1)$$

y轴上  $N+M$  个阵元所对应的方向矩阵为  $\mathbf{A}_y = [\mathbf{a}_y(u_1), \mathbf{a}_y(u_2), \dots, \mathbf{a}_y(u_k)]$ ，具体表达式与式(1)相似，不再赘述。

若  $x$  轴、 $y$  轴的阵元在某时刻接收的数据分别记为  $X$  和  $Y$ ，则根据阵列信号理论有：

$$\begin{cases} X = \mathbf{A}_x s + n_x \\ Y = \mathbf{A}_y s + n_y \end{cases} \quad (2)$$

式中： $s = [s_1, s_2, \dots, s_k]$  为  $K$  个人射信号； $n_x$  和  $n_y$  分别为  $x$  轴和  $y$  轴接收的噪声信号，噪声信号满足均值为 0，方差为  $\sigma^2$ ，服从高斯白噪声模型。

## 2 虚拟阵列重建

在图 1 的阵列结构下，计算稀疏 L 型阵 2 个接收数据的自相关协方差矩阵：

$$\begin{cases} \mathbf{R}_x = E[XX^H] = \mathbf{A}_x \mathbf{R}_s \mathbf{A}_x^H + \sigma^2 \mathbf{I} \\ \mathbf{R}_y = E[YY^H] = \mathbf{A}_y \mathbf{R}_s \mathbf{A}_y^H + \sigma^2 \mathbf{I} \end{cases} \quad (3)$$

式中： $\mathbf{R}_s = E[ss^H] = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2, \dots, \sigma_k^2)$ ； $\sigma_k^2$  为第  $k$  个人射信号的平均功率。

将式(3)的自相关协方差矩阵向量化，可以得到：

$$\begin{cases} \tilde{X} = \text{vec}(\mathbf{R}_x) = (\mathbf{A}_x^* \otimes \mathbf{A}_x) \text{vec}(\mathbf{R}_s) + \sigma^2 \text{vec}(\mathbf{I}) = (\mathbf{A}_x^* \odot \mathbf{A}_x) \mathbf{p} + \sigma^2 \mathbf{I}_n \\ \tilde{Y} = \text{vec}(\mathbf{R}_y) = (\mathbf{A}_y^* \otimes \mathbf{A}_y) \text{vec}(\mathbf{R}_s) + \sigma^2 \text{vec}(\mathbf{I}) = (\mathbf{A}_y^* \odot \mathbf{A}_y) \mathbf{p} + \sigma^2 \mathbf{I}_n \end{cases} \quad (4)$$

式中： $\otimes$  为 Kronecker 乘积； $\odot$  为 Khatri-Rao 乘积； $\mathbf{p} = [\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2, \dots, \sigma_k^2]^T$ ； $\mathbf{I}_n = \text{vec}(\mathbf{I})$ 。

根据 Nested 阵的特点可知，矩阵  $\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A}$  可以看作是经过虚拟化后得到的虚拟阵列，该虚拟阵列的阵元之间无序并且存在冗余， $\mathbf{p}$  可以当作是单快拍的入射信号向量，那么  $\tilde{X}$  和  $\tilde{Y}$  是该虚拟阵列所接收的数据，那么利用相关的角度估计算法便可以估计出入射信号的角度。

**定理 1** 对于阵元数是  $F=N+M$  的二级 Nested 阵，最优二级 Nested 阵的  $N$  和  $M$  满足如下要求时，可以使得虚拟阵列的阵元数(空间自由度，Degree of Freedom)最大。

$$\begin{cases} N=M=\frac{F}{2} & D_{\text{OF}} = \frac{F^2-2}{2} + F, F \text{ 为偶数} \\ N=\frac{F-1}{2}, M=\frac{F+1}{2} & D_{\text{OF}} = \frac{F^2-1}{2} + F, F \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (5)$$

因此，最优的  $F$  阵元二级 Nested 虚拟化后得到的虚拟阵列阵元位置集合为：

$$L_p = \left\{ nd_1, n = \left( -\frac{F^2}{4} - \frac{F}{2} + 1 \right), \dots, 0, \dots, \left( \frac{F^2}{4} + \frac{F}{2} - 1 \right) \right\} \quad (6)$$

依据虚拟阵列阵元位置集合  $L_p$ ，对式(4)进行重排序以及去冗余，得到新的虚拟阵列接收数据，如下：

$$\begin{cases} Z_x = \mathbf{B}_x \mathbf{p} + \sigma^2 \mathbf{I}_n \\ Z_y = \mathbf{B}_y \mathbf{p} + \sigma^2 \mathbf{I}_n \end{cases} \quad (7)$$

式中  $\mathbf{B}$  为对  $\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A}$  所有行向量进行重排序去冗余得到的  $[(F^2-2)/2 + F] \times K$  维向量， $\mathbf{B}$  的第  $i$  行对应第  $(-F^2/4 - F/2 + i)d_1$  个虚拟阵元位置。根据以上分析，可以写出  $\mathbf{B}_x$  方向矩阵为  $\mathbf{B}_x = [\mathbf{b}_x(v_1), \mathbf{b}_x(v_2), \dots, \mathbf{b}_x(v_k)]$ ，表达式为：

$$\mathbf{B}_x = \begin{bmatrix} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}\left(-\frac{F^2}{4}-\frac{F}{2}+1\right)d_1v_1} & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}\left(-\frac{F^2}{4}-\frac{F}{2}+1\right)d_1v_2} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}\left(-\frac{F^2}{4}-\frac{F}{2}+1\right)d_1v_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{F^2}{4}+\frac{F}{2}-1\right)d_1v_1} & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{F^2}{4}+\frac{F}{2}-1\right)d_1v_2} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{F^2}{4}+\frac{F}{2}-1\right)d_1v_k} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$\mathbf{B}_y$  方向矩阵为  $\mathbf{B}_y = [\mathbf{b}_y(u_1), \mathbf{b}_y(u_2), \dots, \mathbf{b}_y(u_k)]$ , 其中  $\mathbf{b}_y$  为轴虚拟阵列接收数据的方向向量, 具体表达式与式(8)相似, 不再赘述。为了更清楚地描述虚拟阵列重建, 现设定  $N=4$ 、 $M=4$ , 那么根据定理 1 可知,  $F=8$ 。根据图 1 的阵列结构可知, 二级 Nested 阵的阵元位置坐标集合可表示为:  $\{0, 1, 2, 3, 4, 9, 14, 19\}$ , 所以最优的 8 阵元二级 Nested 虚拟后得到的虚拟阵元位置集合为  $\{-19, -18, \dots, -1, 0, 1, \dots, 18, 19\}$ , 如图 2 所示。

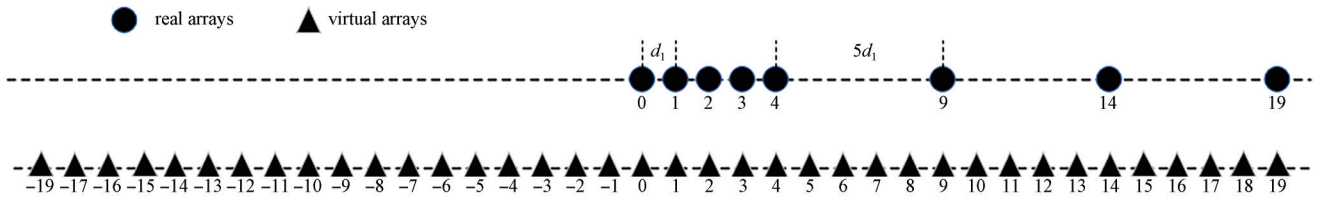


Fig.2 Virtual array position  
图2 虚拟阵元位置

由此可见, 虚拟阵列重建是对接收数据进行自相关协方差运算, 然后进行重排序和去冗余的过程, 由此可以得到一个由虚拟阵列接收到的单快拍数据, 该虚拟阵列的长度远远大于实际物理阵列的长度, 因而对稀疏阵列进行虚拟重建可以获得较大的阵列孔径和较高的自由度, 在角度估计精确度和分辨力上具有明显的优势。

### 3 基于压缩感知的 DOA 估计

需要注意的是, 式(7)中的  $\mathbf{p}$  是单快拍的入射信号向量并且  $\mathbf{p}$  的秩为 1, 因而也就不再满足不相关的条件, 所以利用协方差矩阵特征值分解的角度估计算法失效。通常需要估计的入射信号的个数是有限的, 即角度估计目标相对整个空域范围是稀疏的, 而压缩感知是一套关于稀疏信号采集和恢复的理论, 所以角度估计问题的求解可以转化为压缩感知问题。

进行压缩感知估计角度, 通常需把矩阵  $\mathbf{B}_x$  和  $\mathbf{B}_y$  扩展, 使之形成过完备冗余字典  $\mathbf{B}_{x\Omega}$  和  $\mathbf{B}_{y\Theta}$ 。假设空间合成角度集合  $\Omega = \{v_1, v_2, \dots, v_H\} (H \gg K)$  中包含了所有可能的入射合成角  $v_k$ , 空间合成角度集合  $\Theta$  也包含了所有可能的入射合成角  $u_k$ 。由此依据  $\Omega$  和  $\Theta$  可以构造过完备冗余字典  $\mathbf{B}_{x\Omega}$  和  $\mathbf{B}_{y\Theta}$ , 为:

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{x\Omega} = [b_{x\Omega}(v_1), b_{x\Omega}(v_2), \dots, b_{x\Omega}(v_h), \dots, b_{x\Omega}(v_H)] \\ \mathbf{B}_{y\Theta} = [b_{y\Theta}(u_1), b_{y\Theta}(u_2), \dots, b_{y\Theta}(u_h), \dots, b_{y\Theta}(u_H)] \end{cases} \quad (9)$$

式中  $b_{x\Omega}(v_h)$  和  $b_{y\Theta}(u_h)$  被称为原子。由于  $H$  远远大于目标个数  $K$ , 且空间合成角度集合  $\Omega$  和  $\Theta$  包含了所有可能的空间入射角度, 因而可以利用式(9)将式(7)转化为一个压缩感知问题, 如下:

$$\begin{cases} Z_{x\Omega} = \mathbf{B}_{x\Omega} \mathbf{p}_\Omega + \sigma^2 I_n \\ Z_{y\Theta} = \mathbf{B}_{y\Theta} \mathbf{p}_\Theta + \sigma^2 I_n \end{cases} \quad (10)$$

式中  $\mathbf{p}_\Omega$  和  $\mathbf{p}_\Theta$  为  $H$  维系数向量, 由压缩感知可知,  $\mathbf{p}_\Omega$  和  $\mathbf{p}_\Theta$  中非零元素个数为  $K$ , 它们非零元素位置分别对应空间合成角度  $v_k$  和  $u_k$  的值, 因此只要得到  $\mathbf{p}_\Omega$  和  $\mathbf{p}_\Theta$  中非零元素的位置就能够获得信号目标的角度估计。

根据压缩感知理论, 式(10)是一个欠定方程, 即存在无穷多组解。根据前面的分析可知矢量  $\mathbf{p}_\Omega$  和  $\mathbf{p}_\Theta$  是稀疏的, 则矢量  $\mathbf{p}_\Omega$  和  $\mathbf{p}_\Theta$  的求解等同于求解下述问题:

$$\begin{cases} \min \|\mathbf{p}_{x\Omega}\|_0 & s.t. \quad Z_{x\Omega} = \mathbf{B}_{x\Omega} \mathbf{p}_\Omega + \sigma^2 I_n \\ \min \|\mathbf{p}_{y\Theta}\|_0 & s.t. \quad Z_{y\Theta} = \mathbf{B}_{y\Theta} \mathbf{p}_\Theta + \sigma^2 I_n \end{cases} \quad (11)$$

其中 $\|\mathbf{p}\|_0$ 表示序列 $\mathbf{p}$ 中非零项的个数,由于式(11)是非凸的, $l_0$ 范数的求解是一个NP难题,一方面很难进行直接求解,另一方面抗噪能力不好,很难满足信号恢复的要求,一般采用 $l_1$ 范数代替 $l_0$ 范数,这样就很难处理的非凸问题转换成容易处理的凸优化问题:

$$\begin{cases} \min \|\mathbf{p}_{x\Omega}\|_1 & s.t. \quad Z_{x\Omega} = \mathbf{B}_{x\Omega} \mathbf{p}_\Omega + \sigma^2 I_n \\ \min \|\mathbf{p}_{y\Theta}\|_1 & s.t. \quad Z_{y\Theta} = \mathbf{B}_{y\Theta} \mathbf{p}_\Theta + \sigma^2 I_n \end{cases} \quad (12)$$

通常采用贪婪算法对式(12)进行求解,本文采用OMP算法可以求解出空间合成角度 $v_k$ 和 $u_k$ 。其基本思想是:分别从过完备冗余字典 $\mathbf{B}_{x\Omega}$ 和 $\mathbf{B}_{y\Theta}$ 中选择同信号 $Z_{x\Omega}$ 和 $Z_{y\Theta}$ 内积最大的列;接着通过最小二乘的方法分别算出残差 $r_{x\Omega}$ 、 $r_{y\Theta}$ ;然后分别从 $\mathbf{B}_{x\Omega}$ 、 $\mathbf{B}_{y\Theta}$ 中选择同残差 $r_{x\Omega}$ 、 $r_{y\Theta}$ 最匹配的列,如此不停迭代,直到迭代次数等于信源数 $K$ 时,停止迭代。在 $\mathbf{B}_{x\Omega}$ 和 $\mathbf{B}_{y\Theta}$ 中分别选择的 $K$ 列就代表了 $\mathbf{p}_\Omega$ 和 $\mathbf{p}_\Theta$ 非零元素的位置,因此便获得了空间合成角度 $v_k$ 和 $u_k$ 的估计。

此时需要注意的是所求的 $v_k$ 和 $u_k$ 还不是传统意义上的方位角和俯仰角,还需借助 $v_k \triangleq \sin \theta_k \cos \phi_k$ 和 $u_k \triangleq \sin \theta_k \sin \phi_k$ 反推出方位角 $\phi_k$ 和俯仰角 $\theta_k$ :

$$\begin{cases} \phi_k = \arcsin \left( \sqrt{u_k^2 + v_k^2} \right) \\ \theta_k = \arctan \left( \frac{u_k}{v_k} \right) \end{cases} \quad (13)$$

#### 算法步骤:

步骤1: 计算稀疏L型阵2个子阵接收数据的自相关协方差矩阵 $\mathbf{R}_x$ 和 $\mathbf{R}_y$ ;

步骤2: 依据虚拟阵列阵元位置集合 $L_p$ ,将2个协方差矩阵 $\mathbf{R}_x$ 和 $\mathbf{R}_y$ 进行向量化,然后重排序和去冗余得到虚拟阵列接收数据,可以得到 $Z_x$ 和 $Z_y$ ;

步骤3: 构造所有可能的空间合成角度集合 $\Omega = \{v_1, v_2, \dots, v_H\} (H \gg K)$ 和 $\Theta = \{u_1, u_2, \dots, u_H\} (H \gg K)$ ,且根据式(9)构造过完备冗余字典 $\mathbf{B}_{x\Omega}$ 和 $\mathbf{B}_{y\Theta}$ ;

步骤4: 通过OMP算法对 $v_k$ 和 $u_k$ 进行估计;

步骤5: 根据式(13)求方位角和俯仰角。

## 4 算法复杂度分析

算法复杂度通常用复乘法次数进行衡量,那么得到虚拟阵列接收数据过程的复杂度主要表现为求协方差<sup>[1]</sup>,其复杂度是 $O_1[2(2M+N)^2J]$ ,OMP算法的复杂度主要表现为迭代过程,其为 $O_2[2(KH(2MN-1)+K(K+1)[K(K+1)/4+2(K+2)(2MN-1)/3])]$ ,那么总算法复杂度是 $O_1+O_2$ ,其中 $J$ 为快拍数。

## 5 仿真实验

前面对阵列模型以及二维角度估计过程进行了详细阐述,为了验证可行性,本节采用计算机仿真的方式进行详细的分析说明。为了对比,在相同计算机仿真环境下同时给出了结合MUSIC算法的空间平滑算法(Spatial Smoothing Multiple Signal Classification, SS-MUSIC)<sup>[11]</sup>、增广矩阵束方法(Matrix Enhancement and Matrix Pencil, MEMP)、均匀L阵的稀疏表示方法<sup>[17]</sup>、基于联合奇异值分解的算法(Joint Singular Value Decomposition, JSVD)<sup>[18]</sup>、基于互相关矩阵的算法(Cross-Correlation Matrix, CCM)<sup>[19]</sup>的实验结果。仿真中SS-MUSIC方法采用的阵列模型与本文图1一样,其他的方法采用的是均匀线阵组成的L阵,并且每个子阵都由8个阵元组成。仿真实验中设定第1级均匀线阵的阵元数 $N=4$ ,第2级均匀线阵的阵元数 $M=4$ ,第1级均匀线阵 $d_1$ 等于半波长,第2级均匀线阵的阵元间距 $d_2=(N+1)d_1=5d_1$ 。假设入射信号的功率都相等,算法的估计均方根误差(Root Mean Squared Error, RMSE)定义如下:

$$E_{\text{RMS}}(k) \triangleq \sqrt{\frac{1}{JK} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \left[ (\hat{\phi}_k^j - \phi_k)^2 + (\hat{\theta}_k^j - \theta_k)^2 \right]} \quad (14)$$



式中： $\hat{\phi}_k^j$ 、 $\hat{\theta}_k^j$ 分别为第 $j$ 次实验对第 $k$ 个信源目标的方位角、俯仰角的估计值； $J$ 为蒙特卡洛实验次数，并且在后面的仿真中 $J$ 的值都设定为100。

**仿真 1** 首先对所提算法的估计角度情况进行仿真分析。假设有3个非相干远场窄带信号入射到图1阵列上，并且假定三入射信号的方位角和俯仰角为 $[\phi_1, \theta_1] = [10^\circ, 15^\circ]$ 、 $[\phi_2, \theta_2] = [45^\circ, 80^\circ]$ 以及 $[\phi_3, \theta_3] = [70^\circ, 60^\circ]$ ，快拍数设定为500，信噪比 $R_{SN} = 10$  dB。仿真实验结果见图3。实验表明所提方法能高精度地分辨3个不同信号的方位角和俯仰角，3个信号的估计角度值分别是 $[10.02^\circ, 14.94^\circ]$ 、 $[45.05^\circ, 80.52^\circ]$ 以及 $[69.83^\circ, 59.92^\circ]$ ，估计值与真实值几乎重合。

**仿真 2** 下面对各算法估计角度 RMSE 随信噪比的变化情况进行分析。在该仿真实验中设定3个入射信号的方位角和俯仰角与仿真实验1相同，快拍数仍然为500，单个阵元所接收信号的信噪比由-12 dB变化到12 dB，则由此给出各算法的估计角度 RMSE 随信噪比的变化情况如图4所示。

根据图4的仿真结果可知，所提算法的估计性能随着信噪比的增加而增强，特别是当信噪比较低时，所提方法的估计结果和现有方法相比较，具有的优势比较明显。探究其原因，一方面在于所提方法利用2个Nested阵扩展了阵列的孔径，并且利用协方差降低噪声的影响；另一方面在于OMP算法利用最小二乘法计算残差，寻找最匹配的列，反复迭代，直到获得信源的角度估计，大大减轻了噪声对数据的影响。

**仿真 3** 下面对各算法估计角度 RMSE 随快拍数的变化情况进行分析。在该仿真实验中设定3个入射信号的入射方位角和俯仰角与仿真实验1相同，并且设定入射信号的信噪比 $R_{SN} = 5$  dB，让接收的快拍数发生变化，由20变化到1000，则由此给出各算法的估计角度 RMSE 与快拍数变化之间的关系，如图5所示。

由图5可知，快拍数越大，所提方法的估计角度 RMSE 越小。当快拍数较大时所提算法的性能受快拍数影响较小，特别当快拍数较小时，所提方法具有明显的优势。其原因在于构造了过完备冗余字典，包含了所有可能的入射角度，冗余字典越完备，估计角度 RMSE 越小。另外，压缩感知方法以远低于Nyquist(奈奎斯特)采样率的采样频率对信号进行随机采样，然后用非线性算法重构信号，极大地减轻了系统对数据存储和处理的负担，因而本文所提算法在低快拍数下的估计性能较对比算法更优。

**仿真 4** 本仿真实验分析入射信号的空域角度间隔对各算法性能的影响。在实验中2个入射信号的方位角间隔和俯仰角间隔都同时由小变大，以此考查各方法的性能随方位角和俯仰角间隔 $\Delta$ 由 $2^\circ$ 变化到 $18^\circ$ 。此外设定入射信号的信噪比 $R_{SN} = 5$  dB，接收的快拍数设为500。在上述设定下，各方法的估计角度 RMSE 随角度间隔 $\Delta$ 的变化情况分别如图6所示。

从图6的仿真结果可以看出，各方法的估计角度 RMSE 都随着角度间隔的增大而减小，表明各方法在角度间隔较大时，性能越好，估计结果越精确。本文所提方法对角度间隔较小的信源具有较高的角度精度分辨力，但是当角度间隔较大时，其仿真结果较一般。其原因有可能在于OMP算法中一个参数被确定下来，则在后面不会再变，若随着迭代的进行，发现有些已经确定的参数不是好的选择，而OMP算法没有抛弃以前选择参数，导致结果有偏差。

**仿真 5** 本仿真对多个入射信号进行分析。设定有7个非相干远场窄带信号入射到图1阵列，设定入射信号的信噪比 $R_{SN} = 10$  dB，快拍数为500，并且假定7个入射信号的方位角度为 $5^\circ:12^\circ:77^\circ$ ，俯仰角度为 $10^\circ:10^\circ:70^\circ$ ，从

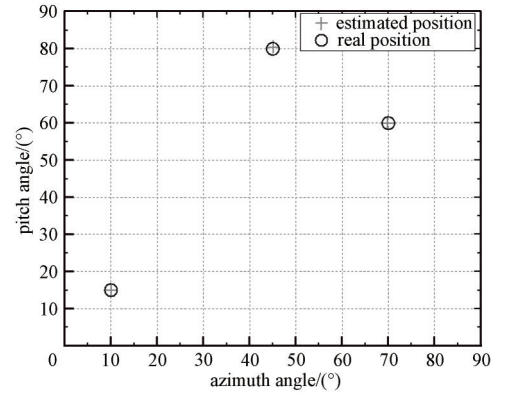


Fig.3 Angle estimation  
图3 角度估计

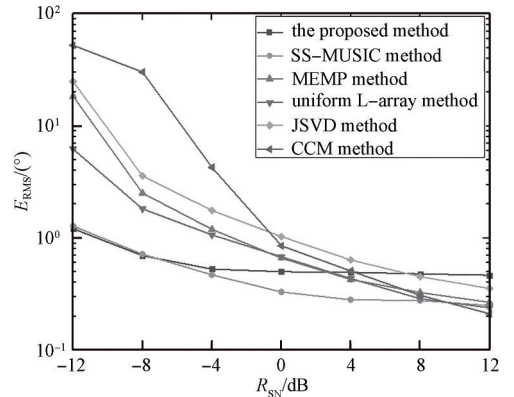


Fig.4 RMSE of each algorithm changing with SNR  
图4 各算法测角RMSE随SNR的变化

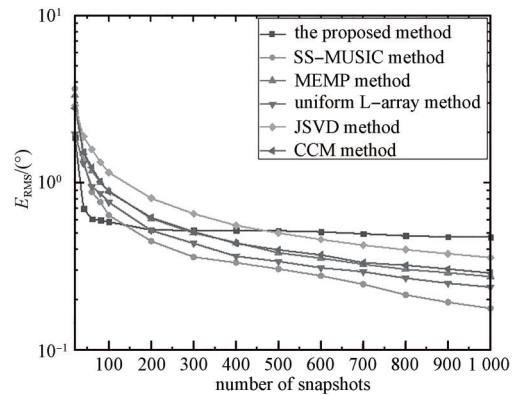


Fig.5 RMSE of each algorithm changing with snapshots  
图5 各算法的测角RMSE随快拍数的变化

图 7 可以看出，所提方法能较精确地分辨 7 个不同信号的方位角和俯仰角，而常规方法不能准确分辨各个入射信号。这是因为所提算法突破了物理孔径的约束，产生了连续虚拟阵元，使得虚拟孔径显著增大，提高了阵列的自由度，因而对信源估计的个数也会相应增加。

**仿真 6** 为了进一步说明所提算法的性能与信源数之间的关系，本仿真实验设定图 1 阵接收的信源个数由 1 个变化到 7 个，入射信号的信噪比  $R_{SN}=10$  dB，快拍数为 500，第 1 个信源的入射角度为  $[\phi_1, \theta_1]=[5^\circ, 10^\circ]$ ，第 2 个信源的入射角度为  $[\phi_2, \theta_2]=[17^\circ, 20^\circ]$ ，第 3 个信源的入射角度为  $[\phi_3, \theta_3]=[29^\circ, 30^\circ]$ ，后面信源的入射角度依次类推。从图 8 可以看出，所提方法的性能随着信源个数的减小而增强，所以为了对信源进行高精度的估计，需要控制好信源个数。另外也要注意，虚拟阵列重建得到的虚拟阵元与实际真实物理阵元并不完全等同，即利用虚拟阵元估计信源角度时，在信源个数上会有一些自由度损失<sup>[20]</sup>。

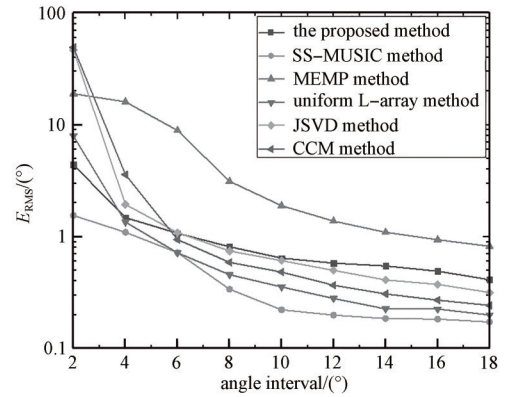


Fig.6 RMSE of each algorithm changing with angle interval  
图 6 各算法测角 RMSE 随角度间隔的变化

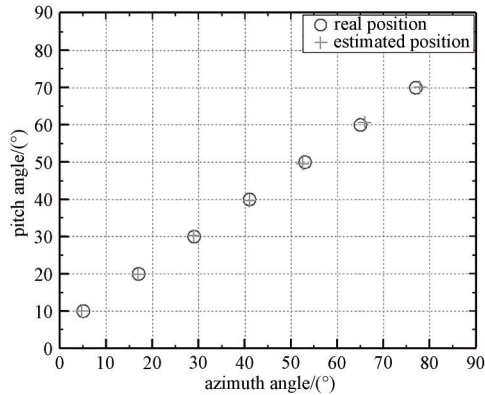


Fig.7 Angle estimation of seven target signals  
图 7 7 个目标信号的角度估计

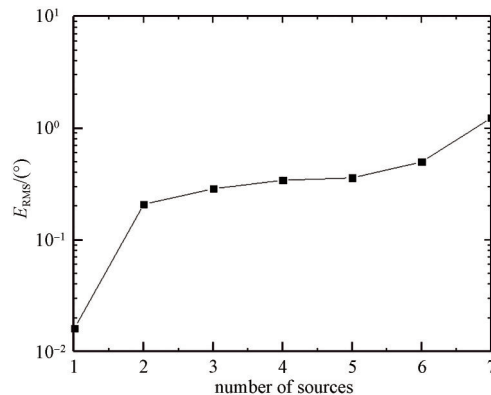


Fig.8 RMSE of proposed algorithm changing with the number of sources  
图 8 所提算法测角 RMSE 随信源数的变化

## 6 结论

本文利用二级 Nested 阵构建了稀疏 L 型阵列，针对此阵列，提出了基于压缩感知的二维角度估计方法。该方法通过计算接收数据的自相关协方差矩阵并向量化，得到虚拟阵元位置集合，然后进行重排序和去冗余，可获得由虚拟阵列确定的单快拍数据，该虚拟阵列的长度远远大于实际物理阵列的长度，因而该阵列相比相同物理阵元的均匀线阵可以获得较大的阵列孔径和较高的自由度。然而通过重排序和去冗余之后的阵列数据是完全相关的，不满足不相关的条件，导致利用协方差矩阵特征值分解的角度估计算法失效。本文采用压缩感知中的 OMP 算法对信号进行二维角度估计，不要求解相关过程，巧妙地把单快拍数据扩展为稀疏数据。仿真实验结果表明该方法能够精确估计入射信号的方位角和俯仰角，同时信源估计的个数相比同物理阵元的普通均匀线阵得到了提高。另外也要注意，虚拟阵列重建得到的虚拟阵元与实际真实物理阵元并不完全等同，即利用虚拟阵元估计信源角度时，在信源个数上会有一些自由度损失。

### 参考文献：

[ 1 ] 张小飞,汪飞,徐大专. 阵列信号处理的理论和应用[M]. 北京:国防工业出版社, 2010. (ZHANG Xiaofei,WANG Fei,XU Dazhuan. Theory and application of array signal processing[M]. Beijing:National Defense Industry Press, 2010.)  
 [ 2 ] SCHMIDT R. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986,34(3):276-280. doi:10.1109/TAP.1986.1143830.  
 [ 3 ] HAARDT M,NOSSEK J A. Unitary ESPRIT: how to obtain increased estimation accuracy with a reduced computational burden[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995,43(5):1232-1242. doi:10.1109/78.382406.  
 [ 4 ] OTTERSTEN B,VIBERG M,KAILATH T. Analysis of subspace fitting and ML techniques for parameter estimation from sensor

- array data[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1992,40(3):590–600. doi:10.1109/78.120802.
- [5] 袁振涛,胡卫东,郁文贤. 基于四阶累积量的空域矩阵滤波 DOA 估计算法[J]. *信号处理*, 2009,25(5):755–760. (YUAN Zhentao,HU Weidong,YU Wenxian. Spatial matrix prefilter DOA estimation based on four-order cumulate[J]. *Signal Processing*, 2009,25(5):755–760.) doi:10.3969/j.issn.1003-0530.2009.05.014.
- [6] 谭伟杰,冯西安. 基于稀疏表示的平行互素阵二维测向方法[J]. *系统工程与电子技术*, 2019,41(5):937–943. (TAN Weijie, FENG Xi'an. Sparsity-based two dimensional direction-finding method for parallel co-prime arrays[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2019,41(5):937–943.) doi:10.3969/j.issn.1001-506X.2019.05.01.
- [7] 李建峰,蒋德富,沈明威. 基于平行嵌套阵互协方差的二维波达角联合估计算法[J]. *电子与信息学报*, 2017,39(3):670–676. (LI Jianfeng,JIANG Defu,SHEN Mingwei. Joint two-dimensional direction of arrival estimation based on cross covariance matrix of parallel nested array[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017,39(3):670–676.) doi:10.11999/JEIT160488.
- [8] LIU Sheng,YANG Lisheng,LI Dong,et al. Subspace extension algorithm for 2D DOA estimation with L-shaped sparse array[J]. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2017,28(1):315–327. doi:10.1007/s11045-016-0406-3.
- [9] 倪柳柳,陈辉,倪萌钰,等. 均匀圆阵主特征矢量分析解相干算法[J]. *国防科技大学学报*, 2021,43(3):58–65. (NI Liuliu,CHEN Hui,NI Mengyu,et al. Uniform circular array decoherence algorithm based on principal eigenvector analysis[J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2021,43(3):58–65.) doi:10.11887/j.cn.202103008.
- [10] ZHANG Dong,ZHANG Yongshun,ZHENG Guimei,et al. Two-dimensional direction of arrival estimation for coprime planar arrays via polynomial root finding technique[J]. *IEEE Access*, 2018(6):19540–19549. doi:10.1109/ACCESS.2018.2821919.
- [11] LONKENG A D,ZHUANG Jie. Two-dimensional DOA estimation using arbitrary arrays for massive MIMO systems[J]. *International Journal of Antennas and Propagation*, 2017(2017):6794920. doi:10.1155/2017/6794920.
- [12] 周荣艳,李孟,谭伟杰. 基于嵌套阵列的稀疏表示稳健波束形成方法[J]. *太赫兹科学与电子信息学报*, 2019,17(3):462–468. (ZHOU Rongyan,LI Meng,TAN Weijie. Sparsity-based robust beamforming method using nested array[J]. *Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology*, 2019,17(3):462–468.) doi:10.11805/TKYDA201903.0462.
- [13] 李林,余玉龙,韩慧. 基于平行互质虚拟阵列的低复杂度二维 DOA 联合估计算法[J]. *电子与信息学报*, 2021,43(6):1653–1658. (LI Lin,YU Yulong,HAN Hui. A low complexity two-demensional DOA joint estimation algorithm based on parallel coprime virtual array[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2021,43(6):1653–1658.) doi:10.11999/JEIT200296.
- [14] 张晓凤,陶海红,孙晨伟. Nested阵列的矩阵重构高精度 DOA 估计算法[J]. *西安电子科技大学学报(自然科学版)*, 2017,44(1):152–158. (ZHANG Xiaofeng,TAO Haihong,SUN Chenwei. Matrix reconstruction high accuracy DOA estimation algorithm on the Nested array[J]. *Journal of Xidian University*, 2017,44(1):152–158.) doi:10.3969/j.issn.1001-2400.2017.01.027.
- [15] 王毅,陈伯孝,杨明磊,等. 分布式 Nested阵列及其高精度 DOA 估计[J]. *系统工程与电子技术*, 2015,37(2):253–258. (WANG Yi,CHEN Boxiao,YANG Minglei,et al. High accuracy DOA estimation using separated Nested array[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2015,37(2):253–258.) doi:10.3969/j.issn.1001-506X.2015.02.04.
- [16] WENG Zhiyuan,DJURIĆ P M. A search-free DOA estimation algorithm for coprime arrays[J]. *Digital Signal Processing*, 2014 (24):27–33. doi:10.1016/j.dsp.2013.10.005.
- [17] 程增飞. 基于压缩感知的阵列信号处理技术研究[D]. 西安:西安电子科技大学, 2017. (CHENG Zengfei. Study on array signal processing technique based on compressed sensing[D]. Xi'an,China:Xidian University, 2017.) doi:10.7666/d.D01384662.
- [18] GU Jianfeng,WEI Ping. Joint SVD of two cross-correlation matrices to achieve automatic pairing in 2-D angle estimation problems[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2007(6):553–556. doi:10.1109/LAWP.2007.907913.
- [19] KIKUCHI S,TSUJI H,SANO A. Pair-matching method for estimating 2-D angle of arrival with a cross-correlation matrix[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2006(5):35–40. doi:10.1109/LAWP.2005.863610.
- [20] 占成宏,胡国平,胡豪,等. 基于虚拟阵元内插的互质阵列目标 DOD 和 DOA 联合估计算法[J]. *系统工程与电子技术*, 2020,42 (7):1455–1463. (ZHAN Chenghong,HU Guoping,ZHOU Hao,et al. Joint DOD and DOA estimation algorithm for coprime arrays based on virtual array element interpolation[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2020,42(7):1455–1463.) doi:10.3969/j.issn.1001-506X.2020.07.04.

#### 作者简介:

苏 龙(1988–), 男, 硕士, 讲师, 主要研究方向为阵列信号处理、稀疏信号处理. email:sulong849@qq.com.

邓桂萍(1981–), 女, 硕士, 副教授, 主要研究方向为射频电路设计.

谷绍湖(1990–), 男, 硕士, 讲师, 主要研究方向为图像信号处理.