

文章编号: 2095-4980(2024)11-1253-09

## 基于改进粒子群-牛顿算法级联的双星定位方法

杨光<sup>\*a,b</sup>, 屈德新<sup>a,b</sup>, 张更新<sup>a,b</sup>

(南京邮电大学 a.通信与信息工程学院; b.通信与网络技术国家地方联合工程研究中心, 江苏 南京 210003)

**摘要:** 双星时差(TDoA)/频差(FDoA)定位因其只需利用 2 颗卫星便可对辐射源进行定位, 成本和实现难度低于多卫星定位体制, 实时性优于单卫星定位, 更适合实际应用。为解决时频差方程解算过程中伴有的非线性最优化问题, 提出一种改进粒子群算法(IPSO); 针对双星时频差定位系统采用牛顿算法定位精确度较高, 但在实际定位中采用该算法存在目标位置初值设置的收敛盲区问题, 提出基于改进粒子群-牛顿(IPSO-Newton)级联定位方法。利用 IPSO 算法获得可靠收敛的初定位值, 并以此作为迭代初值; 级联使用牛顿法进行定位, 提高定位精确度并避免初值不收敛问题。仿真实验表明, 所提算法比 Newton 法有效初始点选取成功率提高了 48.15%, 节省了计算量, 提高了算法的计算效率。

**关键词:** 双星定位; 到达时间差; 到达频率差; 改进粒子群; 牛顿算法

中图分类号: TN927.2

文献标志码: A

doi: 10.11805/TKYDA2023111

## Dual-satellite positioning method based on cascaded IPSO-Newton algorithm

YANG Guang<sup>\*a,b</sup>, QU Dexin<sup>a,b</sup>, ZHANG Gengxin<sup>a,b</sup>

(a.College of Telecommunications & Information Engineering; b.National Local Joint Engineering Research Center for Communication and Network Technology, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing Jiangsu 210003, China)

**Abstract:** Dual-satellite Time-Difference of Arrival(TDoA) and Frequency-Difference of Arrival (FDoA) positionings utilize just two satellites to locate the emitter, bearing lower cost and difficulty than multi-satellite positioning, and better real-time performance than single-satellite positioning system, more suitable for practical applications. In order to solve the nonlinear optimization problem in the process of solving the TDoA/FDoA equation, an Improved Particle Swarm Optimization(IPSO) algorithm is put forward. Dual-satellite TDoA/FDoA location systems use Newton method with high precision, but there exists unsolvable blind areas of initial value of iteration. To address this issue, an cascaded localization method of IPSO and Newton iteration is proposed, in which the IPSO algorithm gives coarse localization result with rapid speed and reliable convergence, and this coarse result is used as the initial value of Newton iteration, so as to reduce the positioning error and avoid non-convergence. By analyzing the simulation results, the proposed algorithm not only increases the success rate of effective initial point selection by 48.15% compared to the Newton method, but also cuts the computation and improves the computational speed.

**Keywords:** dual-satellite positioning; Time Difference of Arrival; Frequency Difference of Arrival; Improved Particle Swarm Optimization; Newton algorithm

卫星定位技术凭借观测范围广、不受天气影响、可靠性较高等因素, 广泛用于信号搜救、军事侦察、远洋航海、导航定位等民用和国防领域<sup>[1]</sup>。利用美国的 GPS、俄罗斯的格洛纳斯、欧洲的伽利略、中国的北斗均可实现辐射源定位<sup>[2]</sup>。对辐射源的卫星定位, 需要利用的关键参数为到达时间差(TDoA)<sup>[3]</sup>、到达频率差(FDoA)<sup>[4]</sup>、到达角度(Angle of Arrival, AoA)<sup>[5]</sup>等。由于卫星与辐射源的距离较远, 微弱的参数估计偏差对定位结果都有较大的影响, 因此参数估计的精确度要求也较高。在获取估计的参数后, 利用已知的卫星坐标及其速度构建定位方程,

收稿日期: 2023-04-28; 修回日期: 2023-06-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(U21A20450)

\*通信作者: 杨光 email:yg19991314@163.com.

在参数足够的情况下便可实现定位。要想获得足够的参数，通常采用 3 颗以上的卫星，国内外主要研究方向均集中于此<sup>[6-9]</sup>，而利用双星时频差实现定位的研究相对较少。

双星时频差联合定位作为卫星定位的重要分支，因具有较高的定位精确度、较快的定位速度、覆盖区域大等优点，更具实用性。与此同时，该定位方法还存在一些问题。文献[10]指出其主要面临的问题是如何求解非线性方程组。文献[11]提出一个对目标方程进行降元得到特定情况下解析解的方法，但通常情况下难以实现。文献[12]提出一种新的计算解析解的方法，但要求主辅星的运动方向和主辅星的连线平行，条件较为严苛，且方程需要通过多次求解，提高了模糊解的数量。文献[13]给出一种采用 Taylor 展开计算目标点位置的方法，该方法需要一个初解，从该初解进行迭代，直至满足迭代截止条件，但在初始解选取不合理或 TDoA、FDoA 测量误差过大时，会使迭代算法不收敛以致无法获得最优的定位结果。文献[14]提出了接收站处于运动状态时对处于匀速直线运动目标的时频差方程解算方法，在观测站位置和速度并不精确的情况下，在不同时间点得到一组时频差，通过联立求解实现定位。文献[15]利用文献[16]中提出的一种新的求解近似有效约束极大似然估计量(an approximately efficient Constrained Maximum Likelihood Estimator, CMLE)的迭代算法，提出一种利用卫星过顶期间获得的多次观测数据实现定位的方法，该方法建立了一个依靠辐射源高程参数的时频差定位模型，采用高斯-牛顿(Gauss-Newton, G-N)迭代实现时频差的融合定位。文献[17]提出一种利用量子粒子群来完成时频差无源定位的算法，确保了整体收敛，该方法可以求解出目标的位置、航向及频率信息，但需多次测量数据。

针对上述存在的问题，在仅有 2 颗可用卫星单次观测情况下提出一种基于改进粒子群(IPSO)与牛顿迭代(Newton)级联的双星时频差定位方法。具体思路为：对 PSO 算法<sup>[18-20]</sup>进行改进，解决 PSO 算法存在收敛慢、容易陷入局部极值的问题；为进一步提高定位精确度，再将上述粗定位结果作为迭代初值，利用 Newton 迭代法具有收敛快的特点<sup>[21]</sup>，在只增加少量计算量的情况下进一步降低误差。

## 1 双星时频差定位的改进 PSO 算法

### 1.1 定位模型

在双星时频差定位过程中，首先要解决的问题是获取信号到达 2 颗卫星的时频差信息。其定位模型如图 1 所示，主要由 1 颗主星(卫星 1)、1 颗辅星(卫星 2)、1 个接收站与 1 个辐射源构成<sup>[22]</sup>。图中， $t_a$ 、 $t_b$  分别为辐射源信号到达卫星 2 和卫星 1 的时间， $t_c$ 、 $t_d$  分别为卫星 2 和卫星 1 转发信号到达接收站的时间。假设需要估计目标点的真实位置为  $\mathbf{u}^o = (x^o, y^o, z^o)^T$ ，2 颗卫星的真实位置和速度分别为  $\mathbf{s}_i^o = (x_i^o, y_i^o, z_i^o)^T \in \mathbb{R}^3 (i=1, 2)$ ， $\dot{\mathbf{s}}_i^o = [\dot{x}_i^o, \dot{y}_i^o, \dot{z}_i^o]^T \in \mathbb{R}^3 (i=1, 2)$ ，卫星位置和速度存在误差， $\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i^o + \Delta \mathbf{s}_i$ ， $\dot{\mathbf{s}}_i = \dot{\mathbf{s}}_i^o + \Delta \dot{\mathbf{s}}_i$ 。为表达方便，令  $\boldsymbol{\beta} = [\mathbf{s}^T, \dot{\mathbf{s}}^T]^T$ ，其中  $\mathbf{s} = [\mathbf{s}_1^T, \mathbf{s}_2^T]^T$ ， $\dot{\mathbf{s}} = [\dot{\mathbf{s}}_1^T, \dot{\mathbf{s}}_2^T]^T$ 。因此卫星的随机误差可表示为  $\Delta \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^o$ ，其中  $\boldsymbol{\beta}^o = [\mathbf{s}^{oT}, \dot{\mathbf{s}}^{oT}]^T$ ， $\mathbf{s}^o = [\mathbf{s}_1^{oT}, \mathbf{s}_2^{oT}]^T$ ， $\dot{\mathbf{s}}^o = [\dot{\mathbf{s}}_1^{oT}, \dot{\mathbf{s}}_2^{oT}]^T$ 。定义  $\Delta \boldsymbol{\beta}$  为均值为零、协方差矩阵为  $\mathbf{Q}_\beta$  的高斯随机向量。

选定卫星 1 为参考卫星，则此时接收到的卫星 2 与卫星 1 之间的到达时间差为  $t_{21}$ ，即：

$$t_{21} = \frac{r_{21}}{c} = \frac{r_{21}^o + \eta_{21}}{c} = \frac{r_2^o - r_1^o + \eta_{21}}{c} \quad (1)$$

式中： $c$  为信号传播速度； $r_{21}$  为到达距离差(Range Difference of Arrival, RDoA)表达式； $\eta_{21}$  为 RDoA 测量噪声； $r_i^o (i=1,2)$  为第  $i$  颗卫星实际位置与所需定位目标点实际位置之间的距离：

$$r_i^o = \|\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i^o\| \quad (2)$$

式中  $\|\cdot\|$  表示取向量的 2 范数。

卫星 2 与卫星 1 之间的到达频率差为  $f_{21}$ ，即

$$f_{21} = \frac{\dot{r}_{21} f}{c} = \frac{(\dot{r}_{21}^o + \dot{\eta}_{21}) f}{c} = \frac{(\dot{r}_2^o - \dot{r}_1^o + \dot{\eta}_{21}) f}{c} \quad (3)$$

式中： $f$  为辐射源发送的信号频率； $\dot{r}_{21}$  为此时主辅星与目标点之间的径向速度差； $\dot{\eta}_{21}$  为径向速度差测量噪声； $\dot{r}_i^o$  为第  $i$  颗卫星与辐射源实际的径向速度：

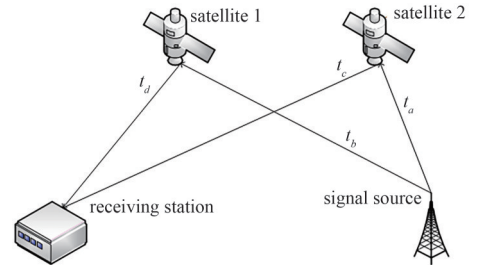


Fig.1 System model of satellite, radiation source, receiving station, reference source

图1 卫星、辐射源、接收站、参考源系统模型

$$\dot{r}_i^o = -\frac{(\dot{s}_i^o)^T(\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i^o)}{\|\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i^o\|} \quad (4)$$

此时观测值构成的向量为  $\mathbf{m}_{\text{tf}} = [r_{21}, f_{21}]^T$ , 误差表示为  $\Delta\mathbf{m}_{\text{tf}}$ , 是均值为零、协方差矩阵为  $\mathbf{Q}_{\text{tf}}$  的随机变量。因此  $\mathbf{m}_{\text{tf}} = \mathbf{m}_{\text{tf}}^o + \Delta\mathbf{m}_{\text{tf}}$ , 其中  $\mathbf{m}_{\text{tf}}^o = [r_{21}^o, f_{21}^o]^T$ ,  $r_{21}^o = r_2^o - r_1^o$ ,  $f_{21}^o = \frac{(\dot{r}_2^o - \dot{r}_1^o)f}{c}$ 。

### 1.2 适应度函数设定

已知观测量构成的向量为  $\mathbf{m}_{\text{tf}} = [r_{21}, f_{21}]^T$ , 对  $r_{21}$ 、 $f_{21}$  表达式等号两边进行移项:

$$r_{21} - r_2^o + r_1^o = \eta_{21} = \eta_1 \quad (5)$$

$$f_{21} - \frac{(\dot{r}_2^o - \dot{r}_1^o)f}{c} = \frac{\dot{\eta}_{21}f}{c} = \eta_2 \quad (6)$$

假设待测目标点处在地球表面上, 引入表达地球面的 WGS-84 方程, 并对其进行变换可得

$$\frac{(x)^2}{A^2} + \frac{(y)^2}{A^2} + \frac{(z)^2}{(1-e^2)A^2} - 1 = \eta_3 \quad (7)$$

式中:  $A=6\ 378\ 137$ , 为 WGS-84 椭球的长半轴;  $e^2=0.006\ 694\ 379\ 990\ 13$ , 为第一偏心率平方。将式(2)和式(4)代入式(5)和式(6)可得

$$r_{21} - \|\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_2^o\| + \|\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_1^o\| = \eta_{21} = \eta_1 \quad (8)$$

$$f_{21} - \frac{f}{c} \left( -\frac{(\dot{s}_2^o)^T(\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_2^o)}{\|\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_2^o\|} + \frac{(\dot{s}_1^o)^T(\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_1^o)}{\|\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_1^o\|} \right) = \dot{\eta}_{21}fc = \eta_2 \quad (9)$$

由于卫星的真实位置与速度未知, 因此利用  $\mathbf{s}$ 、 $\dot{\mathbf{s}}$  代替卫星真实位置和速度  $\mathbf{s}^o$ 、 $\dot{\mathbf{s}}^o$ , 用其替换式(8)和式(9)中的卫星真实位置和速度, 同时将  $\mathbf{u}^o$  替换为  $\mathbf{u}$ , 得到:

$$r_{21} - \|\mathbf{u} - \mathbf{s}_2\| + \|\mathbf{u} - \mathbf{s}_1\| = \eta_4 \quad (10)$$

$$f_{21} - \frac{f}{c} \left( -\frac{(\dot{\mathbf{s}}_2)^T(\mathbf{u} - \mathbf{s}_2)}{\|\mathbf{u} - \mathbf{s}_2\|} + \frac{(\dot{\mathbf{s}}_1)^T(\mathbf{u} - \mathbf{s}_1)}{\|\mathbf{u} - \mathbf{s}_1\|} \right) = \eta_5 \quad (11)$$

联立式(7)、式(10)~式(11)得到  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , 表示为:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\eta_3, \eta_4, \eta_5]^T \quad (12)$$

对其进行 2 范数操作便可得到适应度函数:

$$\text{fit}(\mathbf{u}) = \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \quad (13)$$

### 1.3 改进 PSO 算法

PSO 采用固定惯性权重系数, 优点是参数少, 易于实现, 缺点是 PSO 算法伴有早期收敛, 收敛点误差较大并可能出现局部极值的问题。对 PSO 算法进行改进: 根据文献[23-24]中给出的遗传算法拥有全局搜索能力强、局部搜索能力较差的特点, 将 PSO 与遗传算法联合使用, 引入杂交因子, 使用 PSO 进行局部范围的搜索, 使用遗传算法进行全局范围的搜索, 以此加快收敛速度, 降低定位误差, 在避免局部极值的同时取得全局最优解。

由于辐射源处于三维空间中, 设定所用粒子数为  $N$ , 初始化粒子位置和速度:  $\mathbf{u}_i(0) \in ([X_{\min}, X_{\max}], [Y_{\min}, Y_{\max}], [Z_{\min}, Z_{\max}])$ ,  $\mathbf{V}_i(0) \in ([V_{\min}, V_{\max}], [V_{\min}, V_{\max}], [V_{\min}, V_{\max}])$ 。

第  $i$  个粒子在第  $t$  次迭代时的位置和速度分别为:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i(t) = (u_{i1}(t), u_{i2}(t), u_{i3}(t)) \\ \mathbf{V}_i(t) = (V_{i1}(t), V_{i2}(t), V_{i3}(t)) \end{cases} \quad (14)$$

粒子个体历史最优位置  $\mathbf{P}_{i,\text{best}}$  (即第  $i$  颗粒子的历史最优位置) 表示为  $\mathbf{P}_{i,\text{best}}(t) = (P_{i,1}(t), P_{i,2}(t), P_{i,3}(t))$ , 群体最优位

置为  $\mathbf{G}_{\text{best}}$  (即该粒子群所有粒子的历史最优位置), 表示为  $\mathbf{G}_{\text{best}}(t) = (G_{\text{best},1}(t), G_{\text{best},2}(t), G_{\text{best},3}(t))$ 。  $\mathbf{P}_{i,\text{best}}$  的判断标准为:

$$\mathbf{P}_{i,\text{best}}(t+1) = \begin{cases} \mathbf{u}_i(t+1) & (\text{fit}(\mathbf{u}_i(t+1)) < \text{fit}(\mathbf{P}_{i,\text{best}}(t))) \\ \mathbf{P}_{i,\text{best}}(t) & (\text{fit}(\mathbf{u}_i(t+1)) \geq \text{fit}(\mathbf{P}_{i,\text{best}}(t))) \end{cases} \quad (15)$$

$\mathbf{G}_{\text{best}}$  的判断标准为:

$$\mathbf{G}_{\text{best}}(t+1) = \begin{cases} \mathbf{P}_{k,\text{best}}(t+1) & (\text{fit}(\mathbf{P}_{k,\text{best}}(t+1)) < \text{fit}(\mathbf{G}_{\text{best}}(t))) \\ \mathbf{G}_{\text{best}}(t) & (\text{fit}(\mathbf{P}_{k,\text{best}}(t+1)) \geq \text{fit}(\mathbf{G}_{\text{best}}(t))) \end{cases} \quad (16)$$

式中  $k = \arg \min_{1 < i < N} \{\text{fit}(\mathbf{P}_{i,\text{best}}(t+1))\}$ , 为更新后  $\mathbf{P}_{i,\text{best}}$  适应度值最小的粒子编号, fit 为适应度函数, 其大小表示粒子对于实际值的接近程度, 值越小, 精确度越高。

粒子速度和位置的迭代公式为:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_i(t+1) = w(t)\mathbf{V}_i(t) + c_1\mathbf{r}_{1,i}(t) \odot (\mathbf{P}_{i,\text{best}}(t) - \mathbf{u}_i(t)) + c_2\mathbf{r}_{2,i}(t) \odot (\mathbf{G}_{\text{best}}(t) - \mathbf{u}_i(t)) \\ \mathbf{u}_i(t+1) = \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{V}_i(t+1) \\ w(t) = w_0 + (w_1 - w_0)(t_{\text{max}} - t)/t_{\text{max}} \end{cases} \quad (17)$$

式中:  $\odot$  表示向量对应值相乘;  $c_1$ 、 $c_2$  为学习因子;  $\mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{r}_2$  为元素值均在  $[0, 1]$  内的随机向量;  $w(t)$  为线性惯性权重,  $w_1$ 、 $w_0$  分别为最大和最小惯性权重;  $t_{\text{max}}$  为最大迭代次数。由惯性权重的迭代式不难发现,  $w$  和  $t$  值变化趋势相反。其目的为在迭代前期采用更大的步长来提高收敛速度, 进行全局搜索; 迭代到一定值后, 采用更小的步长来进行局部搜索, 提高精确度。

在迭代获取新的位置后, 对所获得的粒子位置进行限制。限制范围采用粒子初始化时同样的范围, 如超过该范围, 则采用粒子初始化的方式重新生成该粒子对应的信息。

计算更新后粒子的适应值, 同时更新  $\mathbf{P}_{i,\text{best}}$  和  $\mathbf{G}_{\text{best}}$ 。将种群按适应度值进行重新排列, 然后在保持其他数值不变的情况下, 用适应度较好的一半粒子的位置和速度替换适应度较差的一半粒子的位置和速度。

将结果较好的一半粒子直接进入下一代, 替换后的另一半粒子按一定概率随机抽取放入粒子杂交池中进行杂交变异操作, 此部分粒子的位置和速度信息与前半部分粒子对应信息一致。根据杂交概率产生一个杂交位置点, 以便进行粒子对应信息的杂交和变异操作, 杂交公式为:

$$\begin{cases} chx_1 = p \cdot px_1 + (1-p) \cdot px_2 \\ chx_2 = p \cdot px_2 + (1-p) \cdot px_1 \\ chv_1 = \frac{pv_1 + pv_2}{\|pv_1 + pv_2\|} \|pv_2\| \\ chv_2 = \frac{pv_1 + pv_2}{\|pv_1 + pv_2\|} \|pv_1\| \end{cases} \quad (18)$$

式中:  $chx_1$ 、 $chx_2$ 、 $chv_1$ 、 $chv_2$  代表杂交后 2 个子代位置和速度信息;  $px_1$ 、 $px_2$ 、 $pv_1$ 、 $pv_2$  分别为杂交前的 2 个粒子位置和速度信息;  $p$  为杂交概率。

变异操作为随机选取一个坐标轴数值对其进行初始化操作, 产生一个随机点。

计算杂交或变异后的适应度值, 与杂交或变异前该值进行对比, 如杂交或变异后该值优于操作前, 则用杂交或变异后粒子的位置和速度替换杂交前对应信息; 反之, 则保留之前粒子信息, 择优进入下一代, 随后更新  $\mathbf{P}_{i,\text{best}}$  和  $\mathbf{G}_{\text{best}}$ , 直至满足迭代截止条件  $\varepsilon_1$  或最大迭代次数。

## 2 IPSO 与 Newton 级联的双星时频差联合定位方法

Newton 迭代需要迭代初始点, 当该点选取合理时, 具有较优的定位结果。IPSO 算法虽然误差较小, 但因为采用大量粒子迭代, 计算量较大。通过级联这 2 种算法, 首先放宽 IPSO 迭代截止条件(降低迭代次数), 在降低 IPSO 定位精确度的情况下保证 Newton 迭代收敛, 再将 IPSO 的结果作为 Newton 迭代的初始点, 使其能够在降低计算量的同时提高总体的定位精确度。



已知非线性的 TDoA/FDoA 定位方程组可表示为：

$$F_1 = \|\mathbf{u} - \mathbf{s}_2\| - \|\mathbf{u} - \mathbf{s}_1\| - r_{21} \tag{19}$$

$$F_2 = \frac{f}{c} \left( -\frac{(\hat{\mathbf{s}}_2)^T(\mathbf{u} - \mathbf{s}_2)}{\|\mathbf{u} - \mathbf{s}_2\|} + \frac{(\hat{\mathbf{s}}_1)^T(\mathbf{u} - \mathbf{s}_1)}{\|\mathbf{u} - \mathbf{s}_1\|} \right) - f_{21} \tag{20}$$

$$F_3 = \frac{(x)^2}{A^2} + \frac{(y)^2}{A^2} + \frac{(z)^2}{(1 - e^2)A^2} - 1 \tag{21}$$

令  $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = [F_1, F_2, F_3]^T$ ，则非线性方程组  $\mathbf{F}(\mathbf{u})$  微分后梯度矩阵  $\mathbf{F}'(\mathbf{u})$  可表示为：

$$\mathbf{F}'(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{22}$$

设  $\mathbf{u}^*$  为非线性方程  $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = 0$  的解， $\mathbf{u}(t)$  为近似解，若  $\mathbf{F}(\mathbf{u})$  在  $\mathbf{u}(t)$  附近可微，则在  $\mathbf{u}(t)$  附近可将  $\mathbf{F}(\mathbf{u})$  线性化，得到近似线性方程：

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t)) + \mathbf{F}'(\mathbf{u}(t))(\mathbf{u} - \mathbf{u}(t)) \tag{23}$$

若  $\mathbf{F}'(\mathbf{u}(t))$  为非奇异矩阵，便可解算出唯一解，记作  $\mathbf{u}(t+1)$ ，此时牛顿迭代式可表示为：

$$\mathbf{u}(t+1) = \mathbf{u}(t) - [\mathbf{F}'(\mathbf{u}(t))]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{u}(t)) \tag{24}$$

利用该式进行迭代，迭代初始值采用 IPSO 算法的定位结果，直至满足  $\|\mathbf{u}(t+1) - \mathbf{u}(t)\| < \varepsilon_2$ ，迭代结束。此时  $\mathbf{u}(t+1)$  便是方程组的解，其中  $\varepsilon_2$  为 Newton 迭代截止条件。IPSO-Newton 级联定位方法的流程图如图 2 所示。

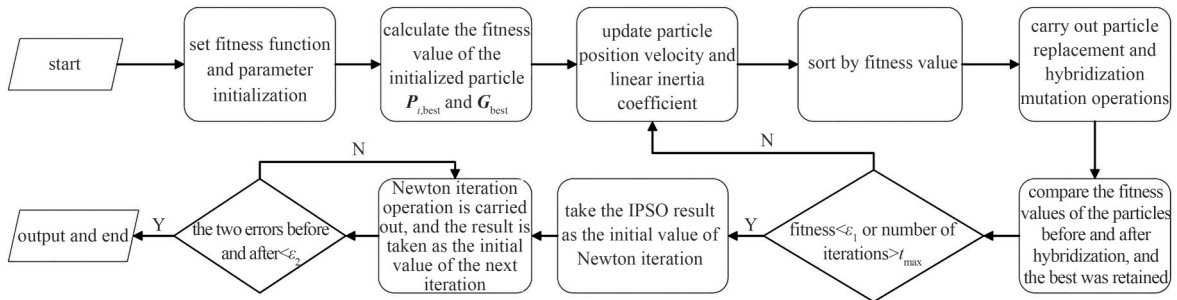


Fig.2 Flowchart of the IPSO-Newton cascaded positioning method

图 2 IPSO-Newton 级联定位方法的流程图

### 3 仿真实验与分析

为检验算法的性能，使用 Matlab 软件建立基于 IPSO-Newton 迭代级联的的双星时频差定位仿真平台，并通过蒙特卡罗实验进行仿真分析。仿真分为 5 部分：仿真 1 主要对比 PSO 算法与 IPSO 算法的收敛速度，验证 IPSO 算法的快速收敛特性；仿真 2 主要验证 IPSO 算法对迭代初始点要求低的特性；仿真 3 和仿真 4 均采用控制变量法分别验证 IPSO-Newton 级联定位算法在 FDoA 和 TDoA 相对误差变化时，定位结果相较于其他定位算法的高精确度；仿真 5 主要验证 IPSO-Newton 级联定位算法在 IPSO 算法迭代截止条件宽松的情况下相较于其他定位算法的定位误差和定位耗时，其降低定位误差，提高定位速度的能力。

初始化 2 颗卫星的位置和速度分别为  $\mathbf{s}_1 = [4\ 158\ 115.564, 5\ 812\ 815.650, -113\ 513.075] \text{ m}$ ， $\mathbf{s}_2 = [-1\ 882\ 223.683, 10\ 174\ 517.200, 357\ 200.989] \text{ m}$ ， $\dot{\mathbf{s}}_1 = [-5\ 624.979, 4\ 035.537, 607.089] \text{ m/s}$ ， $\dot{\mathbf{s}}_2 = [-5\ 346.434, -995.712, 368.195] \text{ m/s}$ 。定位算法参数设置为：种群规模  $N = 200$ ，IPSO 最大迭代次数  $t_{\max} = 100$ ，学习因子  $c_1 = 2$ ， $c_2 = 2$ ，杂交池占比  $C_p = 1$  (即全部进行杂交)，杂交概率  $p = 0.75$ ，最大线性惯性权重  $w_1 = 0.9$ ，最小线性惯性权重  $w_0 = 0.1$ ，起始线性惯性权重  $w = w_1$ ，迭代截至条件  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-7}$ 。

通过定位误差判断定位算法的性能，其值越小，表示定位算法性能越优。定位误差大小为定位算法估计的结果与实际坐标间的距离，设估计结果为  $\mathbf{u}=(x,y,z)^T$ ，实际位置为  $\mathbf{u}^0=(x^0,y^0,z^0)^T$ ，则其计算公式为：

$$E = \sqrt{(x-x^0)^2 + (y-y^0)^2 + (z-z^0)^2} \tag{25}$$

1) 仿真 1: IPSO 算法相较于 PSO 算法收敛速度提升的性能验证

图 3 为 PSO 算法和 IPSO 算法在 TDoA/FDoA 误差为  $[-70 \text{ dB}, -10 \text{ dB}]$ ，辐射源位置为  $(B,L,H)=(32.10,118.78,0)$  时，进行 100 次蒙特卡罗实验后，适应度最小的一次结果对应的适应度值收敛曲线。从图 3 可以看出，IPSO 的收敛速度相较于 PSO 更快，在迭代 20 次左右后，IPSO 算法适应度值已经足够小，而 PSO 此时仍存在较大误差。主要因为 IPSO 算法在 PSO 的基础上引入了线性惯性递减权重，使之在前期进行全局搜索，后期进行局部搜索；同时通过引入替换和杂交变异操作，避免了不必要的搜索过程和容易陷入局部极值问题。因此 IPSO 算法相较于 PSO 算法收敛得更快，达到了加快收敛速度的目的。

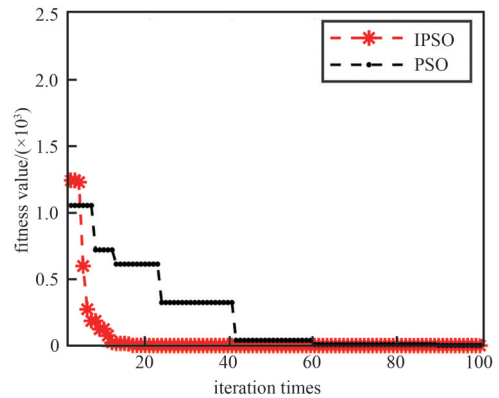


Fig.3 TDoA/FDoA fitness convergence curves of PSO and IPSO  
图 3 PSO 与 IPSO 的 TDoA/FDoA 适应度值收敛曲线

2) 仿真 2: 验证 IPSO 算法相较于 Newton 迭代法对迭代初始点要求低的特性

设置仿真范围为  $L \in [100, 130]$ ， $B \in [-40, 40]$ ，TDoA/FDoA 误差为  $[-80 \text{ dB}, -10 \text{ dB}]$ ，辐射源位置为  $(B,L,H)=(32.10,118.78,0)$ ，2 颗卫星位置和速度分别为  $s_1=[-1\ 975\ 434.516, 21\ 847\ 620.697, 14\ 869\ 012.333] \text{ m}$ ， $s_2=[-26\ 049\ 540.943, 245\ 310.693, -4\ 485\ 565.199] \text{ m}$ ， $\dot{s}_1=[-1\ 180.234, 1\ 490.785, -2\ 359.895] \text{ m/s}$ ， $\dot{s}_2=[524.368, -419.580, -3\ 084.711] \text{ m/s}$ ，图 4 为 2 种算法初始点选取对收敛结果影响的仿真图。

图 4(a) 中的阴影区为 Newton 迭代收敛结果误差在 1 km 以下的初始点范围。从仿真图可以看出，初始点的选取决定了 Newton 迭代法的定位精确度，如初始点选取不合理，定位结果将受到较大影响。根据仿真数据，阴影区占总范围比例为 28.248 9%，由此可知，如若在仿真范围内随机选取初始点进行 Newton 迭代操作，迭代结果误差在阈值以下的概率为 28.248 9%。图 4(b) 为将同样的仿真范围作为 IPSO 算法的初始范围，在该范围内随机初始化粒子，进行 IPSO 与 Newton 级联定位，重复 500 次仿真的结果。由图可知，在进行 500 次仿真后结果误差在阈值以下次数为 382，通过计算可知其概率为 76.4%。可见，IPSO 算法对初始点选取的要求远低于 Newton 迭代法，因此可利用 IPSO 算法对初始化粒子范围要求低的特性，首先利用 IPSO 算法进行初定位，然后将初定位结果作为 Newton 迭代初值，进行精细定位，在避免 Newton 迭代收敛盲区对定位结果造成影响的同时，进一步降低误差。

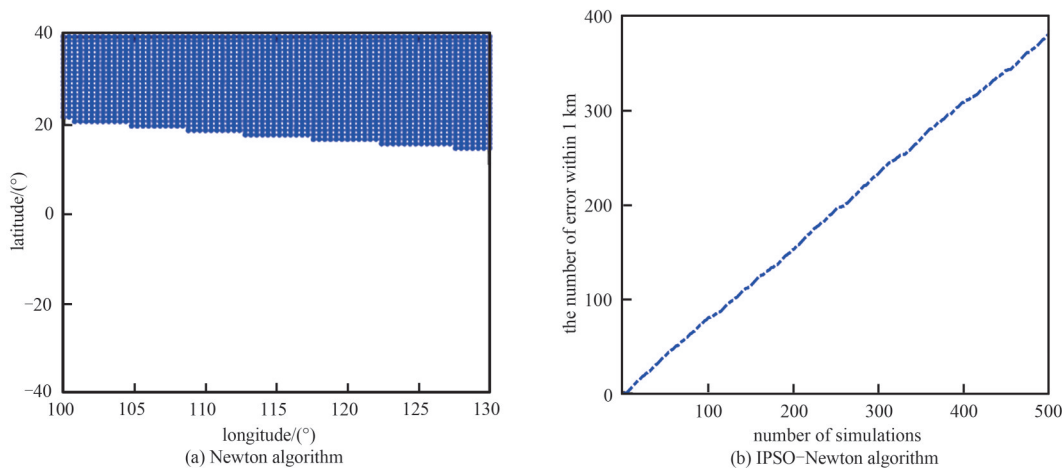


Fig.4 Proportion below the thresholds for two algorithms  
图 4 两种算法阈值以下占比

3) 仿真 3: 验证 IPSO-Newton 级联定位算法在 FDoA 相对误差变化时高精度度定位性能

图 5 为 5 种定位算法在 TDoA 相对误差为  $-70 \text{ dB}$  时，定位误差随 FDoA 相对误差变化的曲线，其余仿真条件

采用初始化值，具体误差数据见表 1。

表 1 各算法随 FDoA 相对误差变化的定位误差  
Table1 Positioning error varying with relative error of FDoA for each algorithm

	relative error of FDoA/dB				
	-10	0	10	20	30
PSO error/m	111 069.5	115 539.3	145 876.2	154 485.2	167 549.0
IPSO error/m	1 271.5	1 922.9	3 581.6	23 673.8	229 075.5
grid search method error/m	94.4	393.4	3 667.3	23 187.7	229 757.7
IPSO-Taylor error/m	1 238.9	1 316.0	2 932.2	23 770.0	230 699.4
IPSO-Newton error/m	47.7	225.8	2 329.3	23 369.4	230 128.1

由表 1 的数据可以看出，PSO 算法由于存在容易陷入局部极值以及收敛精确度差的问题，无论在 FDoA 误差大还是小的情况下定位误差均较大，不适合实际应用。IPSO 算法虽避免了局部极值以及收敛慢的问题，定位精确度较 PSO 算法有较大的提升，但其结果受迭代次数和种群数的影响较大，无法同时保证定位精确度和定位效率。网格搜索法定位精确度受网格划分密度影响较大，在网格划分较密时，定位精确度较高，但过高的网格密度会带来大量计算量，影响定位的实时性。IPSO-Taylor 算法虽采用了与 IPSO-Newton 算法一样的迭代初值，在初值基础上进一步迭代，寻找满足定位方程的最优解，但由于 Taylor 迭代过程中涉及多次矩阵求逆操作，复杂度高于 Newton 迭代的一次求逆，同时 Taylor 迭代采用的地球面方程为近似球面方程，引入的误差较 Newton 法的 WGS-84 方程更高，甚至可能会使结果恶化，因此 IPSO-Taylor 算法的定位精确度和定位效率均差于 IPSO-Newton 算法。综上所述，IPSO-Newton 算法性能优于另外 4 种定位算法，在 FDoA 误差较小的情况下定位性能达到最优。

4) 仿真 4：验证 IPSO-Newton 级联定位算法在 TDoA 相对误差变化时高精度定位性能

图 6 为 5 种定位算法在 FDoA 相对误差为 -10 dB 时，定位误差随 TDoA 相对误差变化的曲线，其中 CRLB (Cramér-Rao Lower Bound) 为克拉美-罗下界。其余条件和仿真 3 一致，具体误差数据见表 2。

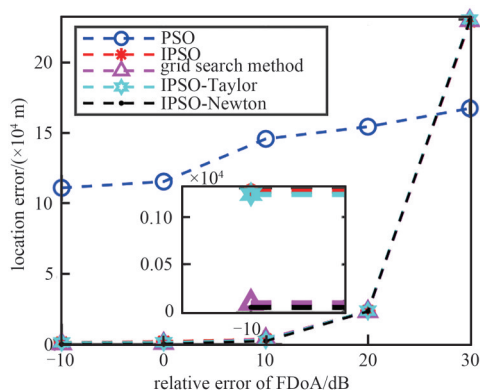


Fig.5 Positioning performance curves of different algorithms with relative error of FDoA

图 5 不同算法随 FDoA 相对误差变化的定位性能曲线

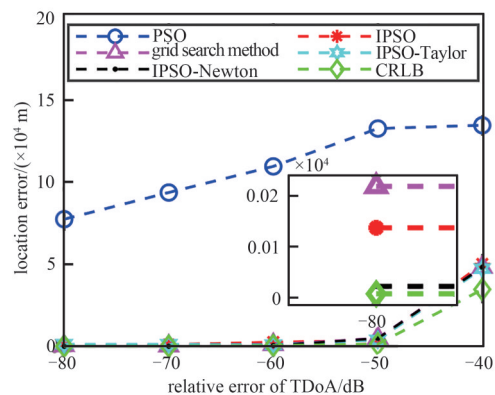


Fig.6 Positioning performance curves of different algorithms with relative error of TDoA

图 6 不同算法随 TDoA 相对误差变化定位性能曲线

由表 2 中的数据不难发现，各种算法的定位精确度受 TDoA 误差的影响较大，主要原因为：在利用 TDoA 参

表 2 各算法随 TDoA 相对误差变化的定位误差  
Table2 Positioning error varying with relative error of TDoA for each algorithm

	relative error of TDoA/dB				
	-80	-70	-60	-50	-40
PSO error/m	77 464.2	93 749.9	109 687.1	132 776.8	134 776.7
IPSO error/m	137.5	989.2	2 549.7	3 641.7	50 135.6
grid search method error/m	218.9	94.4	943.9	4 879.9	48 169.9
IPSO-Taylor error/m	1 274.1	1 238.9	928.0	3 899.0	47 382.2
IPSO-Newton error/m	22.6	47.7	478.6	4 836.1	48 198.8
CRLB/m	7.9	29.7	454.9	1 398.9	34 634.7

数进行定位时，通常将其转换为 RDoA，而这一过程需要乘以信号的传播速度，其值为  $3 \times 10^8$ ，较小的 TDoA 误差也会导致较大的 RDoA 误差，因此对 TDoA 测量精确度要求较高。同时，近似地球面的 WGS-84 方程的引入，

也给定位结果带来了一定额外误差。但 IPSO-Newton 算法定位精确度远优于另外 4 种算法,且在 TDoA 误差小于  $-60$  dB 时逼近克拉美-罗界(Cramér-Rao Bound, CRB),具体原因见仿真 3 分析。其中 PSO 算法定位误差较大,定位结果不具备实际参考价值。由此可见,在经过 IPSO 算法对 PSO 算法定位精确度的提升后,IPSO-Newton 算法可在 IPSO 的基础上进一步降低定位误差,且性能优于作为比较的其他算法。

5) 仿真 5: 验证 IPSO-Newton 级联定位算法降低定位误差,提高定位速度的性能

图 7~图 8 分别为 FDoA 相对误差为  $-10$  dB 时,在不同迭代截止条件下,IPSO 算法、IPSO-Newton 算法、IPSO-Taylor 算法和网格搜索法随 TDoA 相对误差在  $[-70$  dB,  $-30$  dB] 区间内变化时的定位耗时和误差曲线。

图 7~图 8 中,IPSO-Newton 和 IPSO-Taylor 算法中 IPSO 算法的迭代截止条件均为 10 (IPSO 算法适应度值的门限值),小于该值后便停止迭代,其余仿真条件与仿真 4 一致。通过分析仿真不难发现,随着迭代截止条件的放宽,迭代次数减少,定位算法耗时逐渐下降,但由于迭代次数对定位精确度影响较大,IPSO 算法的定位误差也逐渐增大,在 TDoA 误差较小时也不能保证较优的定位结果。同时,由于大规模寻优算法存在一定的随机性,迭代次数减少后随机性更为明显,定位误差波动较大。与之相比,IPSO-Newton 与 IPSO-Taylor 算法只将迭代截止条件为 10 的 IPSO 算法结果分别作为 Newton 法和 Taylor 展开法的初值,将其级联使用后可大幅提高定位精确度,但 IPSO-Taylor 算法结果仍存在一定波动,具体原因见仿真 3 分析。其中,IPSO-Newton 算法定位精确度提升更为明显,优于比较的其他算法,其定位耗时也小于除迭代截止条件为 10 的 IPSO 算法外的其他算法。但迭代截止条件为 10 的 IPSO 算法误差较大,实际不可用。耗时稍多于迭代截止条件为 10 的 IPSO 算法的原因为 IPSO-Newton 法是在该算法基础上再经历 Newton 迭代,虽然迭代截止条件为 10 时 IPSO 算法的定位误差大,但其结果也能保证 Newton 迭代法收敛,只是迭代次数稍多。由于 Newton 有快速收敛的特性,迭代次数增加不明显,单次迭代的复杂度也小于 IPSO 算法单次迭代的复杂度,因此只增加了少量耗时,该值远小于增加 IPSO 算法迭代次数所带来的耗时。可见,利用 Newton 的快速收敛特性,在大幅降低定位误差的前提下仍能够适当放宽 IPSO 迭代截止门限,实现降低计算量,提高定位速度的目的。

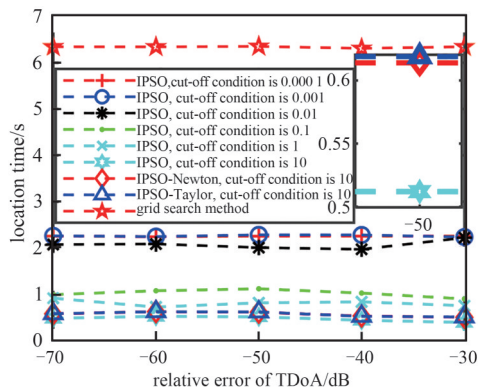


Fig.7 Time consumption curves of different algorithms with TDoA relative error under different iteration cutoff conditions

图 7 不同迭代截止条件下不同算法随 TDoA 相对误差变化的耗时曲线

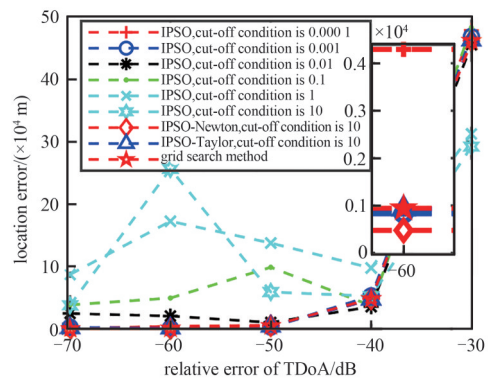


Fig.8 Performance curves of different algorithms with TDoA relative error under different iteration cutoff conditions

图 8 不同迭代截止条件下不同算法随 TDoA 相对误差变化的性能曲线

## 4 结论

文章针对用于双星时频差定位的 PSO 算法收敛速度慢,定位性能差的问题,提出一种 IPSO 算法,同时为了解决在处理搜救信号时,无法获得 Newton 迭代初值,从而影响收敛的问题,提出了 IPSO-Newton 级联定位方法。首先对 PSO 算法进行改进,引入粒子淘汰替换机制以及遗传算法的杂交变异等操作解决其容易陷入局部极值的问题,提高收敛速度以及定位精确度;之后将 IPSO 算法与 Newton 相级联,将 IPSO 算法结果作为 Newton 法迭代初值,进一步降低定位误差。仿真分析表明,所提算法能够满足提高收敛速度和定位精确度的要求,并且可以在保证定位精确度的前提下适当放宽迭代截止条件(减少迭代次数),提高算法的效率。

参考文献:

- [1] TAO R, ZHANG W Q, CHEN E Q. Two-stage method for joint time delay and Doppler shift estimation[J]. IET Radar Sonar&Navigation, 2008,2(1):71-77. doi:10.1049/iet-rsn:20060014. doi:10.1049/iet-rsn:20060014.



- [ 2 ] LEE J Y, MORTON Y T J, LEE J, et al. Monitoring and mitigation of ionospheric anomalies for GNSS-based safety critical systems: a review of up-to-date signal processing techniques[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2017, 34(5): 96–110. doi: 10.1109/MSP.2017.2716406.
- [ 3 ] SUN Y M, HO K C, WAN Q. Solution and analysis of TDOA localization of a near or distant source in closed form[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(2): 320–335. doi: 10.1109/TSP.2018.2879622.
- [ 4 ] 石荣, 张伟, 刘畅. 多星对地定位测速的合作与非合作模型对比[J]. *太赫兹科学与电子信息学报*, 2016, 14(4): 525–530. (SHI Rong, ZHANG Wei, LIU Chang. Contrastive analysis on cooperation and non-cooperation models for location and velocity measurement by multiple satellites to earth objects[J]. *Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology*, 2016, 14(4): 525–530.) doi: 10.11805/TKYDA201604.0525.
- [ 5 ] XU Chen, WANG Zao, WANG Yuhao, et al. Three passive TDOA-AOA receivers-based flying-UAV positioning in extreme environments[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2020, 20(16): 9589–9595. doi: 10.1109/JSEN.2020.2988920.
- [ 6 ] HU Dexiu, HUANG Zhen, CHEN Xi, et al. A moving source localization method using TDOA, FDOA and Doppler rate measurements[J]. *IEICE Transactions on Communications*, 2016(3): 158–766. doi: 10.1587/transcom.2015EBP3355.
- [ 7 ] LI Jinzhou, GUO Fucheng, JIAN Wenli, et al. Source localization and calibration using TDOA and FDOA measurements in the presence of sensor location uncertainty[J]. *Science China(Information Sciences)*, 2014, 57(4): 156–167.
- [ 8 ] LIU Zhixin, HU Dexiu, ZHAO Yongsheng, et al. An improved closed-form method for moving source localization using TDOA, FDOA, differential Doppler rate measurements[J]. *IEICE Transactions on Communications*, 2018, E102(6): 1219–1228. doi: 10.1587/transcom.2018EBP3249.
- [ 9 ] NOROOZI A, OVEIS A H, HOSSEINI S M, et al. Improved algebraic solution for source localization from TDOA and FDOA measurements[J]. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2018, 7(3): 352–355. doi: 10.1109/LWC.2017.2777995.
- [ 10 ] ZHU Guohui, FENG Dazheng, XIE Hu, et al. An approximately efficient bi-iterative method for source position and velocity estimation using TDOA and FDOA measurements[J]. *Signal Processing*, 2016(125): 110–121. doi: 10.1016/j.sigpro.2015.12.013.
- [ 11 ] 郭福成, 樊昀. 双星时差频差联合定位方法及其误差分析[J]. *宇航学报*, 2008, 29(4): 1381–1386. (GUO Fucheng, FAN Yun. A method of dual-satellites geolocation using TDOA and FDOA and its precision analysis[J]. *Journal of Astronautics*, 2008, 29(4): 1381–1386.) doi: 10.3873/j.issn.1000-1328.2008.04.053.
- [ 12 ] HO K C, CHAN Y T. Geolocation of a known altitude object from TDOA and FDOA measurements[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1997, 33(3): 770–783. doi: 10.1109/7.599239.
- [ 13 ] 孙鹏. TDOA/FDOA 干扰源定位技术的研究[D]. 南京: 南京邮电大学, 2020. (SUN Peng. Research on TDOA/FDOA interference source location technology[D]. Nanjing, China: Nanjing University of Posts and Telecommunications, 2020.) doi: 10.27251/d.cnki.gnjdc.2020.001198.
- [ 14 ] 张莉, 王鼎, 于宏毅. 基于多次观测的运动双站对运动目标时差/频差定位算法[J]. *信息工程大学学报*, 2013, 14(6): 719–726. (ZHANG Li, WANG Ding, YU Hongyi. Moving source localization algorithm with two moving receivers using TDOA and FDOA measurements based on multiple observations[J]. *Journal of Information Engineering University*, 2013, 14(6): 719–726.) doi: 10.3969/j.issn.1671-0673.2013.06.013.
- [ 15 ] 徐英杰, 张敏, 张文俊, 等. 基于 G-N 迭代的双星时频差定位融合算法[J]. *雷达科学与技术*, 2022, 20(1): 92–97. (XU Yingjie, ZHANG Min, ZHANG Wenjun, et al. Dual-satellite localization fusion algorithm of TDOA and FDOA based on G-N iteration[J]. *Radar Science and Technology*, 2022, 20(1): 92–97.) doi: 10.3969/j.issn.1672-2337.2022.01.014.
- [ 16 ] CAO Yalu, LI Peng, LI Jinzhou, et al. A new iterative algorithm for geolocating a known altitude target using TDOA and FDOA measurements in the presence of satellite location uncertainty[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2015, 28(5): 1510–1518. doi: 10.1016/j.cja.2015.08.015.
- [ 17 ] 叶李, 王侃. 基于粒子群的时频差协同无源定位技术研究[J]. *自动化与仪器仪表*, 2021(4): 17–20. (YE Li, WANG Kan. Research of passive location technique based on particle swarm algorithm in TDOA and FDOA[J]. *Automation & Instrumentation*, 2021(4): 17–20.) doi: 10.14016/j.cnki.1001-9227.2021.04.017.
- [ 18 ] 成伟明, 王寿峰, 赵春光. 粒子群优化算法在多基站时差定位中的应用[J]. *指挥信息系统与技术*, 2010, 1(3): 66–69. (CHENG Weiming, WANG Shoufeng, ZHAO Chunguang. Application of PSO in TDOA based multi-station location[J]. *Command Information System and Technology*, 2010, 1(3): 66–69.) doi: 10.3969/j.issn.1674-909X.2010.03.016.
- [ 19 ] SUN M, HO K C. An asymptotically efficient estimator for TDOA and FDOA positioning of multiple disjoint sources in the presence of sensor location uncertainties[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(7): 3434–3440. doi: 10.1109/TSP.2011.2131135.