

文章编号: 1672-2892(2010)02-0139-05

## 空间三站时差定位的模糊及无解问题

曾 辉, 曾芳玲

(电子工程学院, 安徽 合肥 230037)

**摘 要:** 通过分析空间三站时差定位的经典算法, 对模糊及无解问题的产生进行了探讨, 分析了无解的分布与布站、站址误差和时差测量误差之间的关系, 提出了解决模糊及无解问题的方法。在实际应用中, 应充分运用目标先验信息, 合理使用消除定位模糊的方法以降低系统复杂性, 提高运算效率, 同时优化测量站布局, 使目标区域避开无解分布区。

**关键词:** 三站时差定位; 模糊; 无解; 算法

**中图分类号:** TN953

**文献标识码:** A

## Ambiguity and non-solution problems of 3-D tri-station TDOA location systems

ZENG Hui, ZENG Fang-ling

(Electronic Engineering Institute, Hefei Anhui 230037, China)

**Abstract:** By analyzing the classical algorithm for the three-dimensional(3-D) tri-station Time Difference Of Arrival(TDOA) location, the reasons to produce ambiguity and non-solution were discussed. The correlation of the distribution of non-solution area with the placement of stations, stations site error and TDOA error was analyzed. Some methods to solve the problems of ambiguity and non-solution were presented. In the practical application, the priori information of targets should be used adequately. The methods to solve the problems of ambiguity must be used well to reduce complexity and enhance operation efficiency. Meanwhile, the distribution of stations should be optimized to make the target area to be out of the non-solution area.

**Key words:** tri-station Time Difference Of Arrival location; ambiguity; non-solution; algorithm

时差定位是一种无源定位方法, 它通过处理 3 个或更多个测量站采集到的信号到达时差数据对辐射源进行定位<sup>[1]</sup>。对辐射源目标实现三维定位, 一般需要 4 个测量站。当目标位于地球表面时, 只需 3 站即可完成目标的三维定位。每一组独立的时差测量可以得到 1 个双曲定位面, 结合被定位目标位于地球表面上, 这 3 个曲面的交点即是目标所在的位置。时差定位系统具有精度高、可实时定位、适用性强等优点, 但在定位过程中会出现多值现象, 从而产生模糊问题, 且在实际定位过程中, 可能由于站址误差及时差测量误差过大而在某些区域出现无解现象。本文基于一种空间三站时差定位的传统算法, 对三站时差定位系统的模糊及无解问题进行了分析, 给出了无解区域分布与布站及站址、时差测量误差之间的关系, 并提出了处理模糊及无解问题的方法。

### 1 空间三站时差定位原理

如图 1 所示, 假设 3 个测量站的坐标分别为  $(x_i, y_i, z_i)$  ( $i=0,1,2$ ), 接收来自位于某一坐标  $(x, y, z)$  的目标点信号, 对到达时间差进行测量, 可以得到 2 组独立的时差。

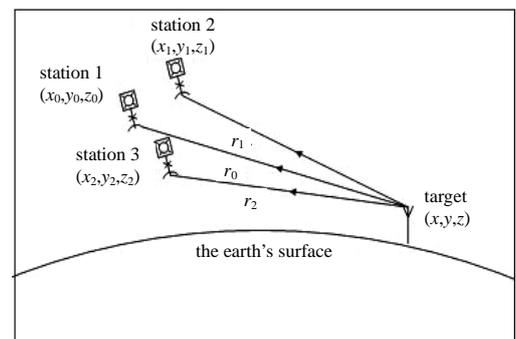


Fig.1 Diagrammatic sketch of the 3-D tri-station TDOA location systems  
图 1 空间三站时差定位系统示意图

在 WGS-84 椭球模型下, 地心(地固)直角坐标和大地经纬高坐标的转换关系为<sup>[2-4]</sup>:

$$\begin{cases} x = (N + H) \cos B \cos L \\ y = (N + H) \cos B \sin L \\ z = [N(1 - e^2) + H] \sin B \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $N$  为该点所在位置的卯西圈曲率半径,  $N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}$ ;  $e$  为 WGS-84 地球模型下的第一偏心率<sup>[2]</sup>,

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad a, b \text{ 分别是地球的长、短半径; } H \text{ 为该点的海拔高度。}$$

当目标位于海平面时, 可以假设  $H=0$ , 于是得到地球表面方程为:

$$\frac{x^2}{N^2} + \frac{y^2}{N^2} + \frac{z^2}{N^2(1 - e^2)^2} = 1 \quad (2)$$

在三维空间中, 每一组独立的时差测量可以得到 1 个双曲定位面, 结合被定位目标位于地球表面上, 这 3 个曲面的交点就是目标所在的位置, 建立目标点定位方程组:

$$\begin{cases} r_1 - r_0 = c\Delta t_1 \\ r_2 - r_0 = c\Delta t_2 \\ r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \\ r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}, i = 1, 2 \\ \frac{x^2}{N^2} + \frac{y^2}{N^2} + \frac{z^2}{N^2(1 - e^2)^2} = 1 \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $r_0, r_1, r_2$  分别为目标到测量站 1, 2, 3 的距离;  $c$  为光速;  $\Delta t_1, \Delta t_2$  分别为目标信号到测量站 1 与到测量站 2, 3 的时差。解上述方程组(3)即可实现对目标点的三维定位。

## 2 定位模糊及无解问题的产生

### 2.1 定位算法

求解方程组(3)的常用算法是牛顿迭代法<sup>[3]</sup>。其迭代公式为:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k - [\mathbf{F}'\mathbf{X}^k]^{-1} \mathbf{F}\mathbf{X}^k \quad (4)$$

式中:  $\mathbf{X} = [x \ y \ z]^T$ ;  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = [f_1 \ f_2 \ f_3]^T$ , 且

$$\begin{cases} f_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} - c\Delta t_1 \\ f_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2} - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} - c\Delta t_2; \\ f_3 = x^2 + y^2 + z^2 / (1 - e^2) - a^2 \end{cases} \quad \mathbf{F}'(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}。$$

为了满足牛顿迭代算法的局部收敛定理, 应使迭代的初始点的误差尽量小。采用地球球面模型进行粗定位, 其结果可作为迭代的初始点。

化简式(3)得:

$$(x_0 - x_i)x + (y_0 - y_i)y + (z_0 - z_i)z = k_i + r_0\Delta t_i \quad (5)$$

式中  $k_i = \left[ \Delta r_i^2 + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) - (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \right] / 2$ 。

采用球面模型进行粗定位, 即用半径为  $a$  的球面代替式(2):

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (6)$$

由  $r_0^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$ ，可得：

$$x_0x + y_0y + z_0z = k_3 - r_0^2/2 \quad (7)$$

式中  $k_3 = (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + a^2)/2$ 。

将式(5)和式(7)联立，可得：

$$\mathbf{AX} = \mathbf{K} \quad (8)$$

$$\text{式中： } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ x_0 - x_2 & y_0 - y_2 & z_0 - z_2 \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + r_0\Delta r_1 \\ k_2 + r_0\Delta r_1 \\ k_3 - r_0^2/2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = [x \quad y \quad z]^T。$$

将  $r_0$  看作常数，则：

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{K} \quad (9)$$

得到用  $r_0$  二次函数表示的  $\mathbf{X}$ ，将其代入  $r_0^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$ ，得到一个以  $r_0$  为未知数的四次方程：

$$s_1r_0^4 + s_2r_0^3 + s_3r_0^2 + s_4r_0 + s_5 = 0 \quad (10)$$

解式(10)，可得  $r_0$ ，进而得到球面模型下的解  $\mathbf{X} = [x \quad y \quad z]^T$ ，即可作为牛顿迭代法的初值代入迭代式，进而可以求得目标辐射源的精确坐标。

## 2.2 定位模糊及无解问题产生的条件

由 2.1 节可知，在定位求解过程中，有一个求解四次方程式(10)的过程，其结果会得到 4 个根，对于 4 个根中的复数根和负实根可以直接判断加以去除。

若 4 个根中含有 2 个正实根，则会产生定位模糊问题；若 4 个根中无正实根，就会产生无解问题。

与平面二维三站时差定位及空间三维四站时差定位系统不同，空间三维三站时差定位系统更容易产生模糊及无解问题。原因是：经多次仿真，可以发现，在一般情况下，四次方程式(10)会有 2 个正实根或没有正实根。

## 3 定位模糊问题的处理

对于定位模糊问题，主要有以下几种解决方法。

### 3.1 反代入时差方程法

一般情况下，四次方程的增根可以通过反代入时差方程的方法去除<sup>[3]</sup>。即分别用得到的 2 个正的  $r_{01}, r_{02}$  代入式(8)解出  $\mathbf{X}_1 = [x_1 \quad y_1 \quad z_1]^T$ ,  $\mathbf{X}_2 = [x_2 \quad y_2 \quad z_2]^T$ ，将其代入式(3)中的时差方程，用误差最小原则去除增根。

以下面的近地空间三站时差定位系统为例：3 个测量站高度为 8 000 m，测量站 1 的位置为东经 122.38°，北纬 24.56°；测量站 2 的位置为东经 122.39°，北纬 23.44°；测量站 3 的位置为东经 122.00°，北纬 24.10°。时差测量均方根误差为 10 ns，各测量站在经度、纬度方向的坐标误差在 3 m 以内，高程误差在 30 m 以内。

选其覆盖区域内 3 个目标点，用 2.1 节给出的定位算法及反代入时差方程法消除定位模糊，计算 200 次，表 1 给出了其消除定位模糊的效果。由表 1 可以看出，用反代入时差方程的方法去除增根，有很大的不稳定性，判断错误的概率约超过 10%，从而得到错误的定位结果。

### 3.2 辅助测量方位角法

借助某站测得的目标辐射源方位角  $\phi$ ，消除定位模糊：将解四次方程所得的 2 个正实根  $r_{01}, r_{02}$

分别代入式(8)，得到 2 个定位点  $(x_1^*, y_1^*, z_1^*)$ ,  $(x_2^*, y_2^*, z_2^*)$ ，计算出每个定位点相对于该测量站的方位角  $\phi_1^*, \phi_2^*$ ，计算  $\delta_i = |\phi_i^* - \phi|$  ( $i=1,2$ )。若  $\delta_1 < \delta_2$ ，取  $(x_1^*, y_1^*, z_1^*)$  为真实定位点；反之取  $(x_2^*, y_2^*, z_2^*)$ 。

表 1 反代入时差方程法消除定位模糊效果

Table 1 Effect of TDOA equation substitution to eliminate ambiguity

the position of target		probability of success in eliminating ambiguity
longitude/(°)	latitude/(°)	
122.799 8	23.517 5	181/200
124.000 0	23.500 0	179/200
123.507 6	23.043 7	170/200

### 3.3 多次定位法

对于定位的实时性要求不太高的目标,可以采取多次定位法消除定位模糊。即对目标辐射源进行多次(如30次)定位解算,用反代入时差方程的方法判断去除四次方程的增根,由3.1节知,约有10%的概率(3次~5次)会判断错误,得出错误的定位结果。通过比对多次(30次)的定位结果,很容易判断出来,从而消除定位模糊。

#### 3.4 3种方法的比较

由以上3种消除定位模糊的方法可以看出,反代入时差方程法最简单,不需要任何辅助信息,但从以上仿真结果可以发现,这种方法并不能保证百分之百的选解正确,约有10%的概率会选错误的虚假定位点作为目标点位置。辅助测方位角法可以保证完全解决模糊问题,但缺点是必须增加辅助测量设备,增加定位系统的复杂性。多次定位法则是在反代入时差方程法的基础上,采用多次测量计算的方法,去除模糊,其缺点是必须多次定位,不适用于对实时性定位要求较高的运动目标。

## 4 无解问题研究

### 4.1 无解的分布

无解问题的产生主要是误差造成的,包括站址误差和时差测量误差。以3.1节的近地空间三站时差定位系统为例,图2中(a),(b),(c)分别给出了站址经、纬度误差分别为3 m,6 m,15 m,高程误差分别在15 m,30 m,60 m以内,时差测量均方根误差分别为3.33 ns,10 ns,16.67 ns时的无解区域分布图。图中3个五角星表示3个测量站,曲线分别为其各自的覆盖区域,阴影部分为无解区域。

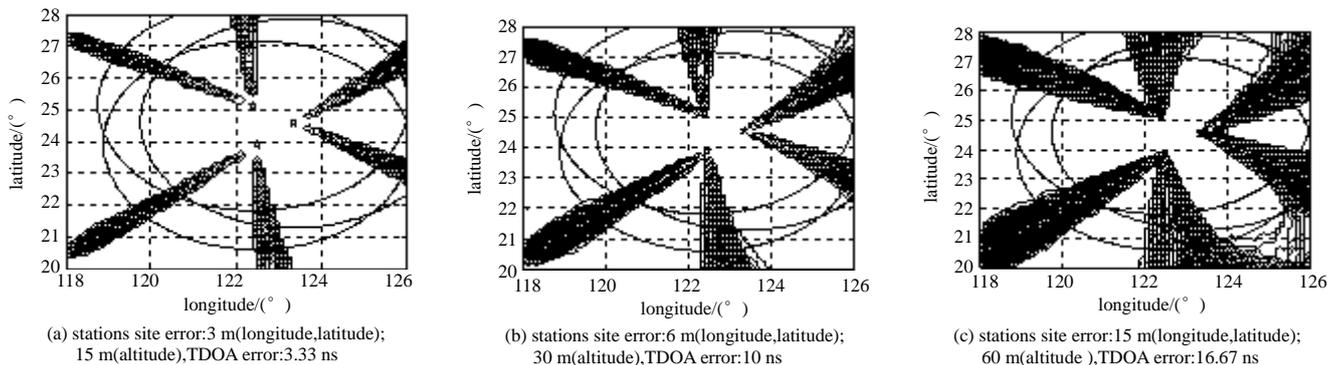


Fig.2 Distribution of non-solution area of the 3-D tri-station TDOA location systems

图2 空间三站时差定位系统无解区域

由上面无解区域的分布图可以看出,无解区基本上沿3个测量站两两连线延长线分布,且站址误差和时差测量误差越大,无解区范围越大。由于受地球曲率及大气折射影响,每个测量站都有各自的直视距离,如图2中曲线所示,所以实际的无解区域应是图中3个测量站共同覆盖区域(3条曲线的交集)中的阴影部分。

### 4.2 无解问题的处理

由于站址误差及时差误差的影响,导致在某些位置定位方程无解<sup>[5]</sup>。对于定位无解问题,可以依据一定的准则,找一个次优解作为定位点,如可以选到2个定位双曲面及地球表面的距离和最小的点作为次优解<sup>[5-6]</sup>。

设空间一点 $P(x, y, z)$ 到2个定位双曲面及地球表面的距离分别为 $d_1(x, y, z)$ ,  $d_2(x, y, z)$ 和 $d_3(x, y, z)$ 。

$$\text{令 } F(x, y, z) = d_1^2(x, y, z) + d_2^2(x, y, z) + d_3^2(x, y, z)。$$

对 $F(x, y, z)$ 求偏导,并令其等于零。

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

解上面的方程组即可得定位方程组的次优解。

(下转第148页)