

文章编号: 1672-2892(2011)01-0064-05

## 不定阶变步长仿射投影算法

赵 愉, 李 锋

(复旦大学 电子工程系, 上海 200433)

**摘要:** 变步长仿射投影算法因结构简单、收敛速度快等优点而得到广泛重视。然而此算法由于计算量大, 其应用受到一定限制。为了降低算法复杂度, 利用变阶思想, 在迭代过程中对投影阶数进行控制, 文章提出一种新的变步长仿射投影算法——不定阶变步长仿射投影算法。该算法根据均方偏差的收敛条件, 在迭代过程中不断减小投影阶数。仿真结果表明, 该算法在减小计算量的同时还能保证很快的收敛速度和低的失调。

**关键词:** 仿射投影算法; 变步长; 变阶; 均方偏差

**中图分类号:** TN911.72

**文献标识码:** A

## Variable Step-size Affine Projection Algorithm with evolving order

ZHAO Yu, LI Feng

(Department of Electronic Engineering, Fudan University, Shanghai 200433, China)

**Abstract:** The variable step-size affine projection algorithm attracts wide attention for its advantages of simple frame, fast convergence rate and so on. However, the high complexity of this algorithm limits its application. To reduce its complexity, a new method is proposed which changes its step size based on evolving order. According to the condition of convergence on the Mean-Square Deviation, the algorithm decreases its order as iteration goes on. Simulation results show low complexity, fast convergence rate, and low misadjustment of the proposed algorithm.

**Key words:** Affine Projection Algorithm(APA); variable step size; evolving order; Mean Square Deviation

自适应算法在信号处理中有着广泛的应用, 这些算法通过对目标函数进行调整, 从而改善接收信号的质量<sup>[1]</sup>。最小均方(Least Mean Square, LMS)算法是一种搜索算法, 通过对目标函数进行适当的调整, 简化梯度向量的计算, 从而使算法收敛。归一化最小均方算法(NLMS)是 LMS 的一种改进, 其本质上是一种变步长 LMS 算法<sup>[2]</sup>。然而当输入数据具有较高的相关性时, NLMS 和 LMS 算法的收敛速率非常低。仿射投影算法(APA)重复利用过去的信号, 在输入信号具有相关性的情况下提高算法收敛速率<sup>[3-5]</sup>。然而数据的重用代价是增加算法的失调和复杂度。

为了减小算法失调, Shin Hyun-Chool 等人提出变步长仿射投影算法(Variable Step size Affine Projection Algorithm, VSAPA)<sup>[6]</sup>, 该算法通过在迭代过程中改变步长的大小, 从而获得较快的收敛速率和更低的失调。但变步长的代价提高了 APA 算法复杂度, 而 APA 算法复杂度随着投影阶数的增长而变高<sup>[4]</sup>。为减小 VSAPA 的算法复杂度, 本文基于降低输入信号维数(阶数)的思想, 提出一种新的变步长仿射投影算法——不定阶变步长仿射投影算法(Evolving order Variable Step size Affine Projection Algorithm, EVSAPA)。此算法在减少计算量的同时提高收敛速率和得到更低的稳态均方偏差(Mean Square Deviation, MSD)。

### 1 仿射投影算法和变步长仿射投影算法

#### 1.1 仿射投影算法

设期望响应  $d(i)$  是一个未知 FIR(Finite Impulse Response)系统的输出, 其参数向量可表示为  $w^0$ ,  $v(i)$  是方差为  $\delta_v^2$  的白噪声,  $u_i$  为  $1 \times M$  的输入行向量, 即:  $u_i = [u(i), u(i-1), \dots, u(i-M+1)]$ 。若  $d(i) = [d(i), d(i-1), \dots, d(i-K)]^T$ ,

$U_i$  是一个  $K \times M$  的输入矩阵, 其中  $K$  为算法的数据重用因子, 即仿射投影算法的阶数,  $U_i = [u_i, u_{i-1}, \dots, u_{i-M}]^T$ 。仿射投影算法是使下一个系数向量  $w_{i+1}$  与  $w_i$  差的 2 阶范数最小化, 而强迫后验误差等于零<sup>[7]</sup>, 于是系数更新为:

$$w_{i+1} = w_i + \mu U_i^* (U_i U_i^*)^{-1} e_i \quad (1)$$

式中:  $e(i) = [e(i), e(i-1), \dots, e(i-K)]^T$  为误差向量, 且  $e_i = d(i) - U_i w_i$ ;  $(\cdot)^*$  表示矩阵的共轭转置。

## 1.2 变步长仿射投影算法

用  $w^0$  同时减去式(1)的两边可以得到:

$$\tilde{w}_{i+1} = \tilde{w}_i - \mu U_i^* (U_i U_i^*)^{-1} e_i \quad (2)$$

由文献[6]可知, 当

$$\mu^0(i) = \frac{E \|p(i)\|^2}{E \|p(i)\|^2 + \delta_v^2 \text{Tr} \left\{ E \left[ (U_i U_i^*)^{-1} \right] \right\}} \quad (3)$$

$$p(i) \triangleq U_i^* (U_i U_i^*)^{-1} U_i \tilde{w}_i = U_i^* (U_i U_i^*)^{-1} e_i \quad (4)$$

成立时, 能确保均方偏差(MSD)在第  $i+1$  次迭代和  $i$  次迭代之间有最大的下降, 式(3)中  $\text{Tr}(\cdot)$  表示矩阵的迹。当  $v(i)=0$  时, 对  $p(i) = U_i^* (U_i U_i^*)^{-1} e_i$  两边取期望, 得:

$$E(p(i)) = E \left( U_i^* (U_i U_i^*)^{-1} e_i \right) \quad (5)$$

为估计  $p(i)$ , 引入下面的迭代式<sup>[6]</sup>:

$$\tilde{p}(i) = \alpha \tilde{p}(i-1) + (1-\alpha) U_i^* (U_i U_i^*)^{-1} e_i \quad (6)$$

式中  $\alpha$  为平滑因子, 且  $0 \leq \alpha < 1$ , 利用  $\|\tilde{p}(i)\|^2$  代替式(3)中的  $E \|p(i)\|^2$  可得<sup>[6]</sup>:

$$\mu(i) = \mu_{\max} \frac{\|\tilde{p}(i)\|^2}{\|\tilde{p}(i)\|^2 + C} \quad (7)$$

而式(2)变为:

$$w_{i+1} = w_i + \mu(i) U_i^* (U_i U_i^*)^{-1} e_i \quad (8)$$

式(7)中  $C$  是一个正常数, 大小约为  $L/R_{SN}$ ,  $\mu_{\max}$  最大值为 2。通过对式(7)分析可以发现, 当  $\|\tilde{p}(i)\|^2$  值较大时,  $\mu(i)$  的值趋近  $\mu_{\max}$ ; 当  $\|\tilde{p}(i)\|^2$  较小时,  $\mu(i)$  也较小, 且  $\mu(i)$  的值介于 0~2 之间。此算法优点是: 在迭代的开始阶段, 算法的偏差比较大, 这时的  $\mu(i)$  值将会较大, 算法收敛速率较高, 迭代一段时间后, 算法趋近于稳定,  $\mu(i)$  的值将会变得较小, 这样将会保证算法的偏差更小。上述算法取得较小的 MSD 是以提高计算量为代价, 而 APA 算法正是由于这一缺陷而受到限制。为减少 VSAPA 算法的计算量, 下面提出不定阶变步长仿射投影算法(EVSAPA)。

## 2 不定阶变步长仿射投影算法

VSAPA 算法通过变步长来降低算法的均方偏差, 然而在算法复杂度上是有增无减, 比传统的仿射投影算法还要高。通过文献[3]可知, 仿射投影算法的复杂度随着投影阶数的增加而提高。同时投影阶数对算法的收敛性能又有很大的影响: 即 APA 算法投影阶数越大, 收敛速率越高, 但稳态均方偏差较大; 当投影阶数较小时, 算法收敛速率较慢, 但稳态均方偏差较小。因此, 可以在改变投影阶数的同时, 通过不断减小步长的方式, 提高收敛速率和减小稳态均方偏差, 同时还能降低算法复杂度。

在算法迭代的开始阶段, 为了确保收敛速率高, 使输入矩阵的阶数较大, 同时步长也保持较大的值。在算法稳定阶段, 采用的输入矩阵阶数和步长小, 这样可以降低算法在稳定阶段的稳态偏差和减小计算量。根据这一思想, 采用文献[8]中变阶的观点, 有如下关系式:

$$K_i = f(e^2(i), K_{i-1}) \quad (9)$$

式中  $K_i$  表示第  $i$  次迭代过程中的输入矩阵阶数。由式(9)可以看出在迭代过程中第  $i$  次的阶数由第  $i-1$  次的阶数和输出误差决定。

对于  $K_i$  的具体取值见式(10)<sup>[8]</sup>:

$$k_i = \begin{cases} \min(k_{i-1} + 1, k_{\max}), & \eta_i < e^2(i) \\ k_{i-1} & , \theta_i < e^2(i) \leq \eta_i \\ \max(k_{i-1} - 1, 1) & , e^2(i) \leq \theta_i \end{cases} \quad (10)$$

式中:  $\eta_i$  表示在  $i$  次迭代过程中的误差上限;  $\theta_i$  表示误差的下限;  $k_i$  的值满足  $1 \leq k_i \leq k_{\max}$ , 最大的投影阶数  $k_{\max}$  必须小于或等于未知 FIR 系统的长度  $M$ <sup>[9-11]</sup>。随着输入阶数的变化, 式(6)变为:

$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i + \mu \mathbf{U}_{i,k_i}^* \left( \mathbf{U}_{i,k_i} \mathbf{U}_{i,k_i}^* \right)^{-1} \mathbf{e}_{i,k_i} \quad (11)$$

式中  $\mathbf{U}_{i,k_i}$  和  $\mathbf{e}_{i,k_i}$  分别满足  $\mathbf{U}_{i,k_i} = [\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i-1}, \dots, \mathbf{u}_{i-k_i+1}]^T$ ;  $\mathbf{e}_{i,k_i} = [\mathbf{e}(i), \mathbf{e}(i-1), \dots, \mathbf{e}(i-k_i+1)]^T$ ,  $\mathbf{e}(i-l) = \mathbf{d}(i-l) - \mathbf{u}_{i-l} \mathbf{w}_{i-l}$ 。在变阶基础上引入变步长, 式(4)变化为:

$$\mathbf{p}_{i,k_i} = \mathbf{U}_{i,k_i}^* \left( \mathbf{U}_{i,k_i} \mathbf{U}_{i,k_i}^* \right)^{-1} \mathbf{e}_{i,k_i} \quad (12)$$

同时由式(6)可以得到:

$$\tilde{\mathbf{p}}_{k_i}(i) = \alpha \tilde{\mathbf{p}}_{k_{i-1}}(i-1) + (1-\alpha) \mathbf{U}_{i,k_i}^* \left( \mathbf{U}_{i,k_i} \mathbf{U}_{i,k_i}^* \right)^{-1} \mathbf{e}_{i,k_i} \quad (13)$$

因此, 可以得到变步长  $\mu(i)$  的数学表达式为:

$$\mu(i) = \mu_{\max} \frac{\|\tilde{\mathbf{p}}_{k_i}(i)\|^2}{\|\tilde{\mathbf{p}}_{k_i}(i)\|^2 + C} \quad (14)$$

于是系数向量的迭代关系式为:

$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i + \mu(i) \mathbf{U}_{i,k_i}^* \left( \mathbf{U}_{i,k_i} \mathbf{U}_{i,k_i}^* \right)^{-1} \mathbf{e}_{i,k_i} \quad (15)$$

在迭代过程中  $\eta_i, \theta_i$  按式(16)计算<sup>[8]</sup>:

$$\begin{cases} \eta_i = \delta_v^2 \frac{\mu(i-1)k_{i-1} + 2}{2 - \mu(i-1)} \\ \theta_i = \delta_v^2 \frac{\mu(i-1)(k_{i-1} - 1) + 2}{2 - \mu(i-1)} \end{cases} \quad (16)$$

式中  $\delta_v^2$  为测量噪声方差。图 1 为算法的具体过程。

通过算法分析发现  $\eta_i, \theta_i$  与稳态均方误差有很重要的关系, 而投影阶数又决定了稳态均方偏差的大小。当输出误差小于  $\theta_i$  时, 为获得更低的稳态偏差, 迭代的阶数将会减 1; 当输出误差大于  $\eta_i$  时, 迭代的阶数将在原来基础上加 1, 以获得更高的收敛速率。图 2 显示的是在一次实验中输入矩阵投影阶数的变化情况。在程序开始阶段, 输入最大阶数为 30。从图 1 中可以看到, 随着迭代次数的增加, 阶数不断变小后趋近平稳, 最后接近于 2, 而传统变步长算法的阶数一直保持 30 不变。可见本文提出的算法, 有效地减少了输入矩阵阶数, 算法复杂度大大地降低, 投影仿射算法的效率得到进一步提高。

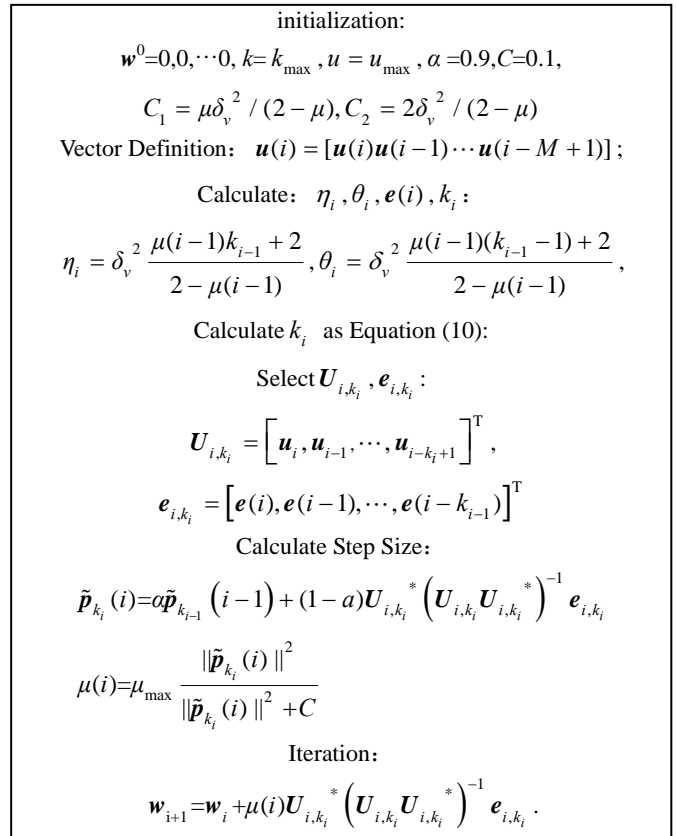


Fig.1 Summary of EVSAPA algorithm  
图 1 EVSAPA 算法总结

与此同时步长  $\mu(i)$  也随着  $\|\tilde{p}_{k_i}(i)\|^2$  的变化而改变。当  $\|\tilde{p}_{k_i}(i)\|^2$  值较大时,  $\mu(i)$  取值接近于  $u_{\max}$ , 收敛速率提高; 当  $\|\tilde{p}_{k_i}(i)\|^2$  取值偏小时,  $\mu(i)$  的值小于  $u_{\max}$ , 算法的稳态偏差将会更小。

### 3 算法仿真

下面通过系统识别对文中所提出的算法进行仿真, 并与相关算法进行比较。设未知系统为 32 阶的 FIR 系统, 由 MATLAB 随机产生, 输入信号由高斯白噪声通过极点为 0.9 的一阶 AR 滤波器产生; 输出信噪比  $R_{SN}$  为 30 dB, 平滑因子  $\alpha=0.9$ , 常数  $C=0.1$ , 所得到的曲线都经过 100 次平均。

在变步长仿射投影算法中,  $u_{\max}$  的初值选取对算法的影响很大。后面的变步长的计算中, 以初值为标准, 初值选得越大, 算法收敛越快。从图 3 可以看出  $u_{\max}$  取不同值时 MSD 的收敛情况。从图 3 可知当  $u_{\max}$  取值在 1~0.1 之间时, 收敛速率较快, 但当  $u_{\max}$  为 0.01 时, 收敛速率较慢, 这与理论效果是相符的。

从图 4 可以看到 EVSAPA 与传统的 VSAPA 算法的比较结果, 算法仿真过程都是对一随机未知系统进行识别。EVSAPA 中取的初始阶数为 30,  $u_{\max}$  为 0.1, VSAPA 的  $u_{\max}$  值分别为 1, 0.1, 0.01。从图 3 中可以看出, 无论 2 种方法的  $u_{\max}$  取值是否一样, EVSAPA 比 VSAPA 有更快的收敛速率和更小的稳态偏差。结合图 2 可知在迭代过程中 EVSAPA 的计算量远小于 VSAPA 的计算量。

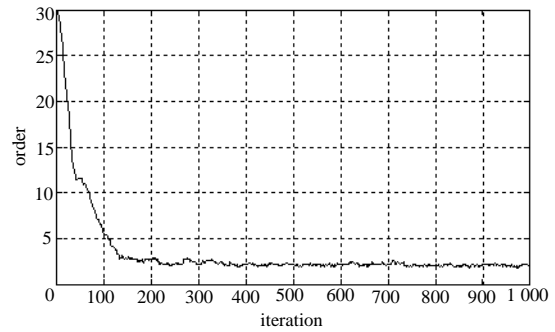


Fig.2 Order of input vectors of EVSAPA,  $k_{\max}=30$ , the average of  $K$  is 3.5  
图 2 EVSAPA 输入矩阵阶数, 其中  $k_{\max}$  为 30,  $K$  平均值为 3.5

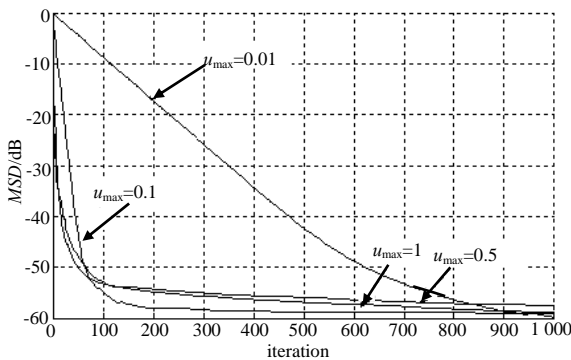


Fig.3 Convergence curves of MSD with different  $u_{\max}$   
图 3 当  $u_{\max}$  取不同值时 MSD 收敛曲线

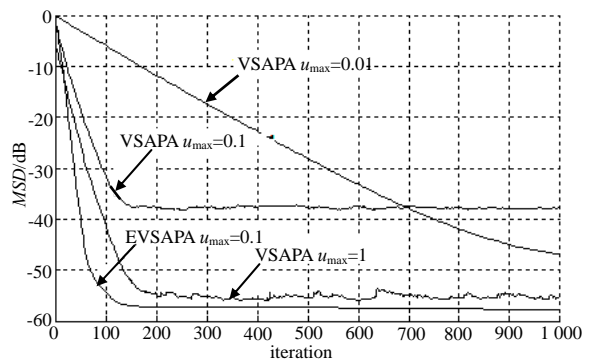


Fig.4 Convergence curves of EVSAPA and conventional VSAPA  
图 4 EVSAPA 与传统 VSAPA 收敛性比较

EVSAPA 算法和 EAPA 算法及 APA 算法的比较如图 5 所示。所有算法阶数初值均为 30。从图 5 可以看出, 本文提出的算法与 EAPA 算法相比: 当  $u_{\max}$  小于等于 EAPA, APA 中的步长时, 本文提出的算法效果更为明显, 具有更小的稳态误差, 更高的收敛速率。

### 4 结论

本文提出了一种新的变步长仿射投影算法, 算法在改变步长的同时, 依据收敛情况不断更改投影阶数。该算法与传统的变步长算法相比, 具有更小的稳态均方偏差, 更快的收敛速率和更低的算法复杂度, 与传统的变阶仿射投影算法相比, 具有更小的稳态偏差。在算法中, 平滑因子  $\alpha$  的取值一般在 0.8~0.99 之间, 常数  $C$  的值在 0.000 1~0.15 之间, 这样可取得较好的仿真效果。

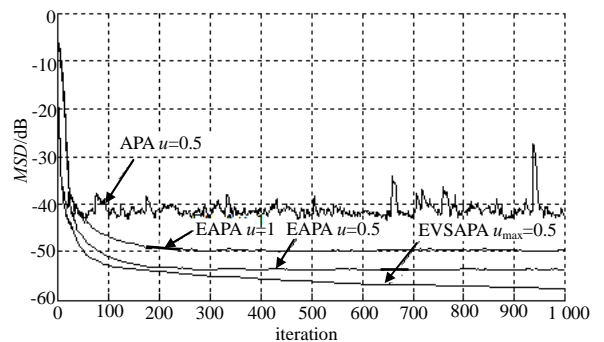
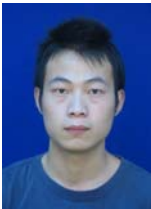


Fig.5 Convergence curves of EVSAPA, EAPA and APA  
图 5 EVSAPA 和 EAPA, APA 收敛性比较

## 参考文献:

- [ 1 ] Sankaran S G,Beex A A. Convergence Behavior of Affine Projection Algorithm[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, APRIL 2000,48(4):1086-1096.
- [ 2 ] 左杨眉. 高斯-赛德快速仿射投影算法的研究[D]. 重庆:重庆大学, 2005. (ZUO Yangmei. Research of Gauss-Seidel Fast Affine Projection Algorithm[D]. Chongqing:Chongqing University, 2005.)
- [ 3 ] Shin H C,Sayed A H. Mean-Square Performance of a Family of Affine Projection Algorithms[J]. IEEE Tran. Signal Processing, 2004,52(1):90-102.
- [ 4 ] Ni Jingen,Li Feng. A Variable Regularization Matrix Normalized Subband Adaptive Filter[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2009,16(2):105-108.
- [ 5 ] 何振亚. 自适应滤波器[M]. 北京:科学出版社, 2002. (HE Zhengya. Adaptive Filter[M]. Beijing:Publishing House of Science, 2002.)
- [ 6 ] Shin H C,Sayed A H,Song W J. Variable Step-Size NLMS and Affine Projection Algorithms[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2004,11(2):132-135.
- [ 7 ] 刘郁林,景晓军,谭刚兵,等. 自适应滤波算法与实现[M]. 2版. 北京:电子工业出版社, 2004. (LIU Yulin,JING Xiaojun, Tan Gangbing,et al. Adaptive Filtering:Algorithms and Practical Implementation[M]. 2nd Edition.Beijing:Electronics Industry press, 2004.)
- [ 8 ] Kim S E,Kong S J,Song W J. An Affine Projection Algorithm with Evolving Order[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2009, 16(11):937-940.
- [ 9 ] Haykin S. Adaptive Filter Theory[M]. 4th Edition. NJ:Prentice-Hall, 2002.
- [10] Sayed A H. Fundamentals of Adaptive Filtering[M]. New York:Wiley, 2003.
- [11] 倪锦根,李锋. 一种新的变步长最小均方自适应滤波算法[J]. 信息与电子工程, 2008,6(1):10-13. (NI Jingen,LI Feng. A Novel Variable Step-Size LMS Adaptive Filtering Algorithm[J]. Information and Electronic Engineering, 2008,6(1):10-13.)

## 作者简介:



赵 愉(1987-), 男, 安徽省安庆市人, 在读硕士研究生, 主要研究方向为信号处理、滤波器设计、电路理论与应用等.email:09210720047@fudan.edu.cn.

李 锋(1946-), 男, 上海市人, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为信号处理、电路理论、网络图论、故障诊断.

-----  
(上接第 59 页)

## 作者简介:



桑晓君(1986-), 男, 上海市人, 在读硕士研究生, 主要研究方向为音频与通信信号处理.email:sangxiaojun@163.com.

陈晓光(1964-), 男, 安徽省五河市人, 博士, 副教授, 主要研究方向为信号处理, 射频 RF 理论与技术.