

文章编号: 2095-4980(2023)03-0332-08

基于原子范数的互质阵列协方差矩阵重构算法

陈根华, 罗晓萱

(南昌工程学院 信息工程学院, 江西 南昌 330099)

摘要: 针对互质阵列的虚拟阵列插值过程中协方差项的非均匀加权问题, 将互质阵列协方差矩阵重构转换为低秩矩阵填充与原子范数重构, 提出基于原子范数的互质阵列协方差矩阵重构算法。该算法先利用广义增广法得到非完备的互质阵列协方差矩阵, 并利用截断的均值奇异值门限填充法得到虚拟阵列的协方差矩阵初值, 然后对其进行原子范数最小化求解, 实现稳健的正定 Toeplitz 协方差矩阵重构。该算法充分利用互质阵列协方差矩阵信息, 有效提高互质阵列 DOA 估计算法的稳定性, 降低计算复杂度。

关键词: 互质阵列; 矩阵重构; 原子范数; 低秩矩阵填充; 差分伴随阵

中图分类号: TN958

文献标志码: A

doi: 10.11805/TKYDA2020462

Covariance matrix reconstruction algorithm of coprime array based on minimum atomic norm

CHEN Genhua, LUO Xiaoxuan

(School of Information Engineering, Nanchang Institute of Technology, Nanchang Jiangxi 330099, China)

Abstract: Aiming at the nonuniform weighting for covariance lags in virtual array interpolation, the covariance matrix reconstruction of the coprime array is modeled as the low-rank matrix completion and atomic norm reconstruction. A novel covariance matrix reconstruction algorithm based on atomic norm for coprime array is proposed. Firstly, the Generalized Augmentation Approach(GAA) is utilized to obtain a partial covariance matrix of the coprime array. Then the partial covariance matrix is completed with the truncated mean singular value threshold method and reconstructed through the atomic norm minimization. A robust positive definite Toeplitz covariance matrix is accomplished. The proposed algorithm makes full use of the information contained in the coprime array to improve the stability of Direction of Arrival(DOA) estimation algorithm and reduce the computational complexity.

Keywords: coprime array; matrix reconstruction; atomic norm; low rank matrix completion; difference coarray

波达方向(DOA)估计是阵列信号处理的重要应用, 其应用领域包括雷达、声纳、语音和无线通信等。近年来, 稀疏阵列^[1]在同孔径条件下较均匀阵列有更大的孔径, 如最小冗余阵列(Minimum Redundancy Array, MRA)、互质(Coprime)阵列和嵌套(Nested)阵列等, 可通过其差分伴随阵构造虚拟阵扩展孔径, 并充分利用其自由度(Degree of Freedom, DOF)进行 DOA 估计^[2-4], 可实现多于阵元数的信源估计。互质阵列作为典型的结构化稀疏阵列, 阵元间的互耦效应较小, 与嵌套阵列、最小冗余阵列不同, 通常互质阵列的差分伴随阵是非连续的, 存在缺失项, 即存在孔(Lag), 因此由非均匀差分伴随阵进行信号估计时容易产生模糊, 常见的解决方案是从非均匀虚拟阵列中仅选取最大连续部分, 构成一个虚拟均匀阵列^[1], 但这种方式得到的虚拟阵列舍弃了不连续的虚拟阵元, 导致其孔径信息未得到充分利用, 从而并未实现互质阵列的孔径扩展。常用的最大熵矩阵填充法可应用于差分伴随阵列插值, 但其计算量非常大, 难以实时求解, 而且对信噪比(Signal-to-Noise Ratio, SNR)敏感, 仅在极低 SNR 可有效求解, 因此算法适用性与稳健性不高^[5]。一种无网格 DOA 估计算法^[6]通过核范数最小化^[7]插值互质阵列, 实现插值虚拟阵列协方差矩阵所需最少阵元数。该核范数最小化算法是无正则化的, 但协方差矩阵重

收稿日期: 2020-09-15; 修回日期: 2020-12-08

基金项目: 江西省科技厅重点研发资助项目(20212BBG73009); 国家自然科学基金青年基金资助项目(61401187)

构是基于矩阵填充原理的，表明非均匀虚拟阵列的协方差矩阵保持不变。由于虚拟阵列是从样本协方差矩阵中获得的，有限快拍数会影响协方差矩阵的估计精确度。基于内插虚拟阵列的互质阵列 DOA 估计方法^[8]将虚拟阵列内插转换为求解原子范数最小化的协方差矩阵重构问题，实现差分伴随阵插值及高精度的 DOA 估计。基于原子范数的内插虚拟阵列重构及 DOA 方法，在分辨力、估计精确度有优势，并依赖二值矩阵区分缺失虚拟阵元，但原子范数重构优化过程中的 Toeplitz 矩阵结构约束条件导致了增广矩阵中协方差项进行非均匀加权，限制了该算法的性能。

针对以上重构过程中协方差项的非均匀加权的问题，本文结合低秩矩阵填充(Low-rank Matrix Completion)^[9]理论，将原子范数理论应用于互质阵列的协方差矩阵重构中，先利用低秩矩阵填充理论中的截断均值奇异值门限法(Mean Singular Value Threshold, MSVT)^[10]得到虚拟阵列协方差矩阵初值，再利用原子范数最小化理论重构虚拟阵列协方差矩阵。该算法克服了 Toeplitz 矩阵重构过程中的非均匀加权约束，改善了重构算法的性能。仿真实验验证了算法的正确性与有效性。

1 互质阵列信号模型

互质阵列是由一对互质均匀阵列组成，其中一个由阵元间距为 Nd 的 M 个阵元组成，另一个由阵元间距为 Md 的 N 个阵元组成，且 M 与 N 为互质整数。由质数性质可知，任意互质阵列包括 $L = M + N - 1$ 个阵元，互质阵列孔径 $M_a = (N - 1)M$ ， $N > M$ ，其阵元位置可表示为：

$$S = \{Mnd, 0 \leq n \leq N - 1\} \cup \{Nmd, 0 \leq m \leq M - 1\} \tag{1}$$

式中： n, m 为正整数； d 为单位间距。设有 K 个不相干远场窄带信号从 θ_k 方向入射到阵列上， $k = 1, 2, \dots, K$ ，则 t 时刻的快拍矢量为：

$$\mathbf{x}(t) = A(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t), t = 1, 2, \dots, N_s \tag{2}$$

式中： $A(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_p)]$ 为阵列流形 (Manifold) 矩阵； $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_K(t)]^T$ 为信号矢量； $\mathbf{n}(t) = [\mathbf{n}_1(t), \mathbf{n}_2(t), \dots, \mathbf{n}_L(t)]^T$ 为零均值方差为 σ_n^2 的高斯白噪声； N_s 为快拍数，快拍数据阵 $\mathbf{x} = [\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(N_s)]$ 。

互质阵列的协方差矩阵 \mathbf{R}_x 为：

$$\mathbf{R}_x = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)] = A(\theta)\mathbf{R}_s A^H(\theta) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_M \tag{3}$$

式中： $\mathbf{R}_s = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)]$ 为信号相关阵； \mathbf{I}_M 为 M 维单位阵；上标 H 表示共轭转置。

因快拍数有限，本文利用协方差矩阵的最大似然估计 $\hat{\mathbf{R}}$ 作为互质阵列协方差矩阵，即：

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}^H}{N_s} \tag{4}$$

则协方差矩阵相关项可表示为：

$$(\mathbf{R})_{m,l} = r(m-l) = \sum_{k=1}^K P_k e^{-jk(n_m - n_l)d \sin \theta_k} + \sigma_n^2 \delta(m-l), m, l = 0, 1, 2, \dots, M_a, m \geq l \tag{5}$$

式中 $\delta(\cdot)$ 为 Kronecker 函数。

互质阵列的差分伴随阵^[11]是非连续完备的，以质数 $N = 5, M = 3$ 的质数阵列为例， $S = \{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12\}d$ ，二阶差分集 $\Phi_s = \{n_m - n_l, m, l = 0, 1, \dots, L - 1\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12\}d$ ，缺失项 $\bar{\Phi}_s = \{8, 11\}d$ ，如图 1 所示。由 Caratheodory 定理可知^[12]，当伴随差分阵为连续完备时，可唯一确定信源数、方向、功率。

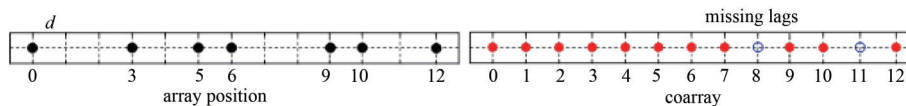


Fig.1 Element positions of coprime array
图 1 互质阵列的阵元位置

2 互质阵列的虚拟阵列协方差矩阵重构算法

目前，互质阵列进行 DOA 估计的方法主要分为 2 种^[13]，一是利用互质阵列的 2 个子阵列进行 DOA 估计，再

进行联合角度解模糊, 但该方法可分辨的信源数需小于子阵个数, 且对联合算法要求较高; 二是通过互质阵列的协方差矩阵重构虚拟阵元, 再进行 DOA 估计, 该法能充分利用互质阵列信息及其自由度^[8]。但互质阵列为部分增广阵列^[5], 利用常规信号处理方法会产生模型失配, 而矩阵填充能实现欠采样信息的高效处理, 可应用于互质阵列, 实现低成本信息获取。

因此, 结合低秩矩阵填充理论, 本文提出基于原子范数最小的协方差矩阵重构算法。该算法先利用广义增广法对互质阵列的相关序列进行处理, 得到增广 Toeplitz 矩阵, 然后利用均值奇异值阈值(Mean Singular Value Threshold, MSVT)算法填充协方差相关项, 再求解最近邻准则下的原子范数约束问题重构互质阵列的虚拟协方差矩阵。

2.1 广义增广法(GAA)

由直接数据协方差矩阵(Direct Data Covariance, DDC)的相关项冗余平均后得到:

$$\hat{t}_{n_m-n_l=k} = \frac{\sum_{m,l=0}^{M_s} \hat{R}_{ml} \delta(k, n_m - n_l)}{\sum_{m,l=0}^{M_s} \delta(k, n_m - n_l)}, m \geq l, k \in \Phi_s \quad (6)$$

再将缺失项补零后得到相关矢量 $\hat{\mathbf{t}} = [\hat{t}_0, \hat{t}_1, \dots, 0, \dots, \hat{t}_{M_s}]^T$, 将相关矢量 Toeplitz 化后得到增广厄密对称矩阵 $\hat{\mathbf{T}}_0$, 即 $\hat{\mathbf{T}}_0 = T(\hat{\mathbf{t}})$, $T(\cdot)$ 表示 Toeplitz 化算子。

设缺失项为 \hat{t}_k , $k \in \bar{\Phi}_s$, 则互质阵列的虚拟阵列协方差矩阵可表示为完备连续的 Toeplitz 矩阵,

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) = \hat{\mathbf{T}}_0 + \sum_{k \in \bar{\Phi}_s} (\hat{t}_k \mathbf{E}_+^k + \hat{t}_k^* \mathbf{E}_-^k) \quad (7)$$

式中 \mathbf{E}_+ 和 \mathbf{E}_- 分别为前向与后向移位矩阵, 即:

$$\mathbf{E}_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_- = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & 0 & & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_- = \mathbf{E}_+^T \quad (8)$$

求解式(7)的 \hat{t}_k 即矩阵填充问题, $k \in \bar{\Phi}_s$ 。本文采用低秩矩阵填充理论的核范数最小模型求解, 结合阵列协方差矩阵的厄密正定性, 求解缺失相关项可表示为约束优化问题, 即:

$$\arg \min \|\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{t})\|_*, \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) \succeq 0 \quad (9)$$

式中 $\|\cdot\|_*$ 为核范数, 求解矩阵的奇异值之和最小。

2.2 截断的均值核范数最小填充算法

截断的均值核范数最小填充法利用奇异值阈值(Singular Value Threshold, SVT)算法思想^[14]和 Toeplitz 矩阵对角线元素相等特性, 先对矩阵进行奇异值分解并保留大于阈值的奇异值, 将缺失对角线元素均值化作为初值, 再通过迭代逼近缺失相关项 \hat{t}_k 的最优值。由于 Toeplitz 矩阵厄密对称, 奇异值分解即为特征值分解, 可先对 $\hat{\mathbf{T}}_0$ 特征值分解为:

$$\hat{\mathbf{T}}_0 = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{U}^H, \Sigma = \text{diag}(\{\lambda_i\}_{0 \leq i \leq M_s}) \quad (10)$$

式中: $\text{diag}(\cdot)$ 为矩阵对角化; \mathbf{U} 为 $\hat{\mathbf{T}}_0$ 特征分解后得到的特征矩阵。

设门限 $\tau > 0$, 由 SVT 算法可得特征值门限算子 \mathcal{D}_τ 为:

$$\mathcal{D}_\tau(\mathbf{T}_0) = \mathbf{U} \mathcal{D}_\tau(\Sigma) \mathbf{U}^H, \mathcal{D}_\tau(\Sigma) = \text{diag}(\{\lambda_i \text{sgn}(\lambda_i - \tau)\}_{0 \leq i \leq M_s}) \quad (11)$$

其中符号函数 $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ 。

因此可得 Toeplitz 矩阵中的缺失相关项 \hat{t}_k 及 $\hat{\mathbf{T}}_{\text{mean}}$ 的估计值分别为:

$$\hat{t}_k = \text{mean}(\text{diag}(\mathcal{D}_\tau(\mathbf{T}_0), k)), k \in \bar{\Phi}_s \quad (12)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_{\text{mean}} = \mathbf{T}_0 + \sum_{k \in \bar{\Phi}_s} (\hat{t}_k \mathbf{E}_+^k + \hat{t}_k^* \mathbf{E}_-^k) \quad (13)$$

式中 $\text{mean}(\cdot)$ 为均值化。再将 $\hat{\mathbf{T}}_{\text{mean}}$ 进行迭代填充逼近运算, 获得新的 \hat{t}_k 与 $\hat{\mathbf{T}}_{\text{mean}}$, 直至满足截止条件, 设迭代后虚拟阵列协方差矩阵为 \mathbf{T}_c 。

2.3 原子范数重构

已有的基于原子范数的 DOA 估计算法^[8]主要通过定义一个二值向量表示待内插虚拟阵元, 利用内插虚拟阵列的初始协方差矩阵进行原子范数约束, 求其原子范数最小化优化解, 实现虚拟域内无网格化 DOA 估计, 但其优化约束条件中对协方差相关项进行了非均匀加权。针对上述的非均匀加权的问题, 本文主要通过低秩矩阵填充理论得到虚拟协方差矩阵初值, 再以原子范数最小化重构协方差矩阵。

根据低秩 Toeplitz 矩阵的范德蒙(Vandermonde)分解定理, 存在向量 \mathbf{z} 满足

$$\mathbf{T}(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^K p_k \mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^H \quad (14)$$

式中: p_k 为特征值; \mathbf{r}_k 为特征向量。当半正定的厄密 Toeplitz 矩阵 $\mathbf{T}(\mathbf{z})$ 为接收阵列的协方差矩阵时, 特征向量 \mathbf{r}_k 即为阵列导向矢量 $\mathbf{r}(\theta_k)$, 向量 \mathbf{z} 为协方差矩阵的首列, 其原子分解^[15]可表示为:

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{A}_r} = \inf_K \left\{ \sum_k p_k : \mathbf{z} = \sum_{k=1}^K p_k \mathbf{r}(\theta_k), p_k \geq 0 \right\} \quad (15)$$

式中: \inf 为下确界; 原子集合 $\mathcal{A}_r = \{\mathbf{r}(\theta) | \theta \in [-90^\circ, 90^\circ]\}$ 。

本文以截断的均值 SVT 法得到的虚拟阵列协方差矩阵 \mathbf{T}_c 作为初值, 利用原子分解法将互质阵列的虚拟阵列协方差矩阵重构问题表示为:

$$\min \frac{1}{2} \|\mathbf{T}(\mathbf{z}) - \mathbf{T}_c\|_F^2 + \mu \|\mathbf{z}\|_{\mathcal{A}_r}, \text{ s.t. } \mathbf{T}(\mathbf{z}) \geq 0 \quad (16)$$

式中 μ 为正则系数。类似于矩阵的秩, 原子分解是非凸的^[16], 难以求解, 可对其凸松弛后转换成原子范数最小问题, 即:

$$\min \frac{1}{2} \|\mathbf{T}(\mathbf{z}) - \mathbf{T}_c\|_F^2 + \mu \|\mathbf{z}\|_{\mathcal{A}}, \text{ s.t. } \mathbf{T}(\mathbf{z}) \geq 0 \quad (17)$$

式中原子范数 $\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{A}}$ 定义^[16]为:

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{A}} = \inf \{t > 0 | \mathbf{z} \in t \text{conv}(\mathcal{A})\} = \inf \left\{ \sum_k p_k \mid \mathbf{z} = \sum_{k=1}^K p_k \mathbf{r}(\theta_k) \right\} \quad (18)$$

式中 $\text{conv}(\mathcal{A})$ 为包含所有 \mathcal{A} 的凸包(Convex hull), \mathcal{A} 可以为矢量, 也可以是秩 1 矩阵^[16]。

由 Vandermonde 分解定理可知, 低秩 Toeplitz 矩阵 $\mathbf{T}(\mathbf{z})$ 可唯一分解为:

$$\mathbf{T}(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^K p_k \mathbf{r}(\theta_k) \mathbf{r}^H(\theta_k) \quad (19)$$

由矩阵的迹(trace)定义可得

$$\text{Tr}(\mathbf{T}(\mathbf{z})) = (M_a + 1) \sum_{k=1}^K p_k \quad (20)$$

再由原子范数定义可得

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{A}} = \sum_{k=1}^K p_k = \text{Tr}(\mathbf{T}(\mathbf{z})) / (M_a + 1) \quad (21)$$

因此, 式(17)可等效为:

$$\min \frac{1}{2} \|T(\mathbf{z}) - \mathbf{T}_c\|_F^2 + \tau \text{Tr}(T(\mathbf{z})), \quad s.t. \quad T(\mathbf{z}) \succeq 0 \quad (22)$$

式中 $\tau = \mu / (M_a + 1)$ 。

式(22)为凸优化的半正定规划(Semi-Definite Program, SDP)问题, 通过 CVX 工具箱可方便求解, 相较于内插阵元法, 无需引入多个参数^[8]对虚拟阵列进行区分计算, 降低了计算复杂度。

综上所述, 本文提出的基于原子范数最小的协方差矩阵重构算法步骤如下:

- 1) 获取互质阵列的快拍数据并计算其协方差矩阵;
- 2) 利用式(6)的冗余平均法计算互质阵列协方差项;
- 3) 利用式(7)的增广法转化为矩阵填充问题;
- 4) 利用式(12)截断均值核范数法求解缺失协方差项初值;
- 5) 利用式(17)原子范数法重构互质阵列协方差矩阵。

3 仿真实验

设 $N=5$, $M=3$, $\mathbf{S}=[0, 3, 5, 6, 9, 10, 12]d$, $d=0.5\lambda$, $L=7$, $\Phi_s = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12\}d$, 其缺失阵元 $\bar{\Phi}_s = \{8, 11\}d$, SNR 为信噪比, $N_s=100$, 均值化截断 SVT 算法的迭代终止条件 $\varepsilon=10^{-4}$, 每个数据点做 300 次 Monte Carlo 试验。

试验 1 分析了本文的矩阵重构算法的多目标分辨性能。设 K 为 9 个等功率不相干目标, 其入射角为 $\theta=[-60^\circ, -45^\circ, -30^\circ, -15^\circ, 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ]$, $R_{SN}=0$ dB。图 2 为利用本文算法后得到的多信号分类算法(Multiple Signal Classification, MUSIC)伪谱图, 可明显分辨多于阵元数的 9 个目标, 充分说明本文矩阵重构算法正确性, 在理论上该互质阵列可有效分辨 12 个目标。

试验 2 分析本文协方差矩阵重构算法的解模糊性能。设 3 个等功率不相干目标的入射角 $\theta=[-8^\circ, 0^\circ, 8^\circ]$, $R_{SN}=0$ dB。由图 3 的 MUSIC 伪谱图可知, 由互质阵列的直接协方差矩阵得到的 MUSIC 伪谱图存在明显伪峰, 导致目标入射角估计模糊, 而本文算法利用原子范数最小化重构填充后的低秩矩阵, 并得到稳定且分辨深度最深的角度估计, 提高了互质阵列的分辨力。而一种矩阵乘法方式(Keyword Rank, KR)^[17]只能选择其中连续完备差分集 $\Phi_s^c = \{0, 1, \dots, 6, 7\}d$, 相当于 8 阵元的均匀线阵列(Uniform Linear Array, ULA), 使得估计精确度不高。虚拟阵列插值法无明显估计偏差, 且分辨深度高于 13 阵元的均匀阵列, 证明原子范数优化的优越性。

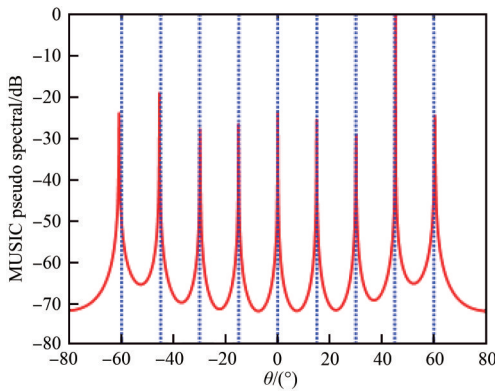


Fig.2 Multi-target MUSIC pseudo-spectrum
图 2 多目标的 MUSIC 伪谱图

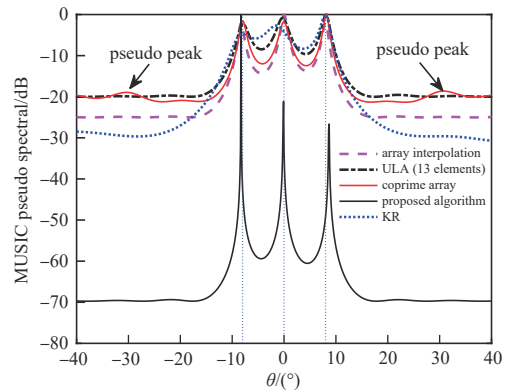


Fig.3 MUSIC pseudo-spectrum
图 3 MUSIC 伪谱图

试验 3 分析了本文算法的估计精确度。设 2 个等功率不相干目标入射角为 $\theta=[-3^\circ, 3^\circ]$, 以均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)为评价指标, 本试验选用与互质阵列同孔径的均匀线阵和 KR 积法、虚拟阵列插值法进行比较, 其中正则系数 $\mu=3.6$ 。由图 4 可知, 本文算法的性能在低 SNR 时远优于虚拟阵列插值法, 其估计性能趋于同孔径的 ULA, 但在高 SNR 时, 阵列插值法优于本文的原子范数法, 出现了明显性能交叉点, 而利用连续的部分差分伴随阵的 KR 积法由于有效阵列孔径仅为 8 阵元, 其性能远低于其他算法, 说明本文基于原子范数最小化的协方差矩阵重构算法有效地扩展了互质阵列孔径, 提高了互质阵列的角度估计性能。因此, 本试验充分说明在低 SNR 时, 选用本文算法重构协方差矩阵, 而在高 SNR 时, 需选用阵列插值法。

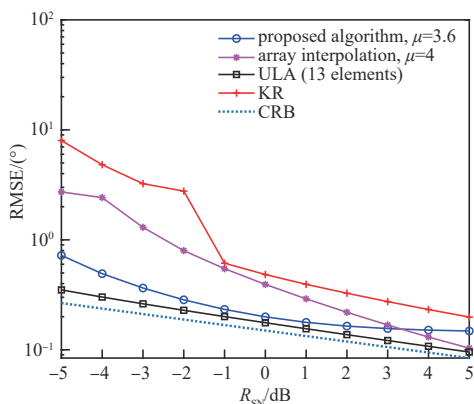


Fig.4 RMSE vs. SNR
图4 不同SNR下的RMSE

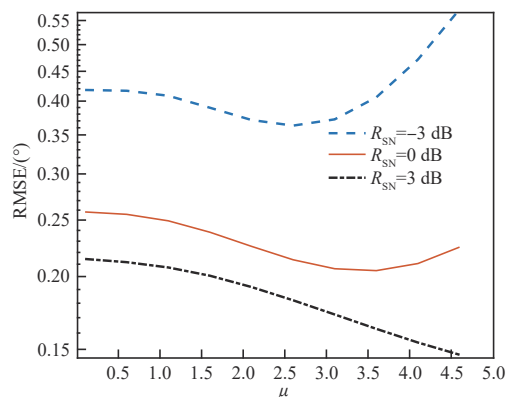


Fig.5 Relationship between regularization parameter and SNR
图5 正则系数与信噪比关系图

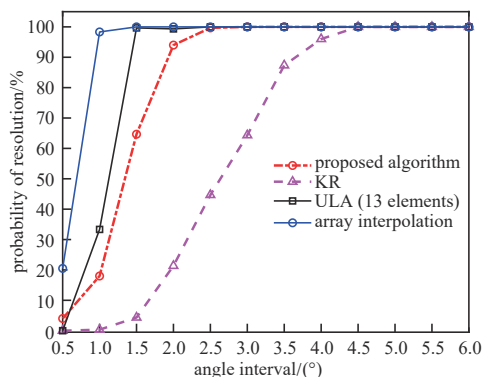


Fig.6 Probability of successful resolution of reconstruction algorithm based on atomic norm
图6 基于原子范数的填充重构算法分辨成功概率

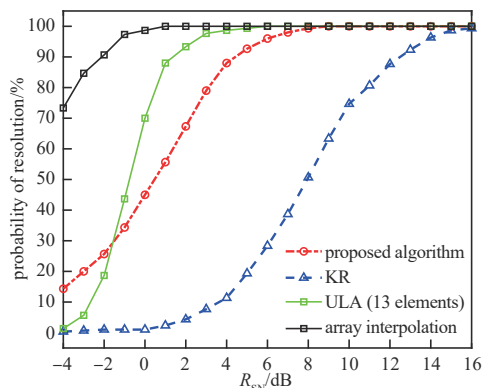


Fig.7 Resolution performance of the proposed algorithm
图7 近目标分辨性能

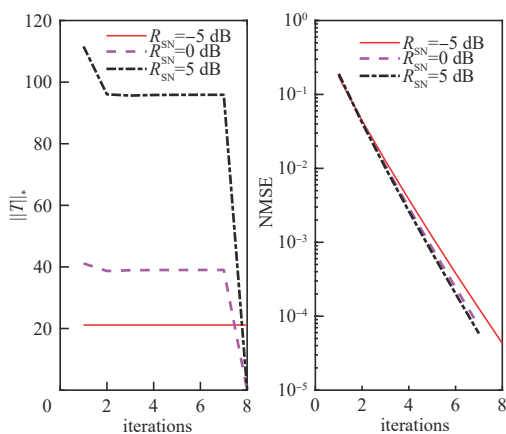


Fig.8 Covariance matrix reconstruction error
图8 协方差矩阵重构误差

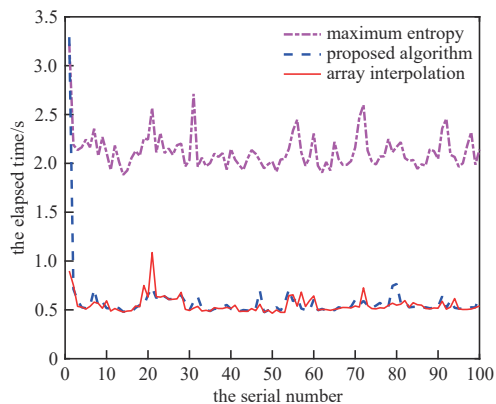


Fig.9 Running time for reconstruction algorithm based on atomic norm
图9 基于原子范数矩阵重构算法的运行时间

试验4分析正则系数 μ 对算法的性能影响。仿真条件同试验3。由图5可知，在不同SNR条件下，随着正则系数 μ 的增大，RMSE单调递减，但当 μ 继续增大时，RMSE则单调增加， μ 存在明显的门限效应，如 $R_{SN}=-3$ dB时， μ 门限约为2.5； $R_{SN}=0$ dB时， μ 门限约为3.5。显然，SNR越大， μ 门限也越大，因此，采用本文算法重构互质阵列的协方差矩阵时需根据SNR条件选用最优的 μ 值，使得Toeplitz协方差矩阵重构性能最优。

试验5分析了本文算法对两目标的目标分辨性能。仿真条件同上。图6为 $R_{SN}=5$ dB时的成功分辨力，图7给出2个目标角度间隔 $\Delta\theta=2^\circ$ 时2个目标的MUSIC分辨力，其分辨准则为2个目标角度误差都小于半波束宽度时为已分辨的，分辨门限约为2 dB。由本实验结果可知，本文算法分辨性能低于阵列插值法，而远优于KR积法，说

明本文提出的协方差矩阵重构算法具有较高的分辨性能。

试验 6 分析本文算法的快速收敛性。设 2 个等功率不相干目标入射角为 $\theta = [-5^\circ, 5^\circ]$, $R_{\text{SN}} = [-5, 0, 5] \text{dB}$ 。图 8 给出核范数与归一化均方误差 (Normalized Mean Squared Error, NMSE) 的迭代过程, 其中 NMSE 定义为 $NMSE = \|\mathbf{T}^{k+1} - \mathbf{T}^k\|_F / \|\mathbf{T}^k\|_F$, \mathbf{T}^k 表示第 k 次迭代 Toeplitz 矩阵。显然, 由图 8 可知, 本文采用的基于截断均值核范数最小的协方差矩阵填充法仅需迭代 2~3 次即逼近终止条件, 实现了协方差矩阵的快速填充。

试验 7 分析了本文算法的计算量与运行时间。仿真选用的互质阵列同上, 2 个目标入射角为 $\theta = [-30^\circ, 20^\circ]$ 。图 9 为 $R_{\text{SN}} = -1 \text{dB}$ 时, 100 次独立的 Toeplitz 协方差矩阵重构时间分布图。由图 9 可知, 本文算法的计算量或运行时间与文献 [8] 的虚拟阵列内插法相当, 但远小于最大熵填充法, 约为最大熵法的三分之一。在相同的 SNR 条件下, 最大熵法的计算量起伏比较大, 而本文算法的计算量比较均匀, 稳健性要优于其他算法。

4 结论

本文提出一种基于原子范数的互质阵列协方差矩阵重构算法, 该算法从协方差矩阵的相关项出发, 将非完备协方差矩阵填充转换为低秩矩阵填充与原子范数优化重构。该算法先利用截断的均值核范数最小的矩阵填充法获取虚拟阵列协方差矩阵初值, 再利用原子范数最小化对协方差矩阵进行优化重构。仿真实验证明了本文算法的有效性与正确性。本文算法充分利用了互质阵列孔径, 利用重构的协方差矩阵进行 DOA 估计, 可实现多于阵元数的信源估计与分辨。本文原子范数最小化过程的去噪性能明显, 能得到稳定且分辨深度较高的角度估计, 尤其在低 SNR 区时可获得接近于同孔径均匀阵列的估计与分辨性能。后续将进一步研究稀疏阵列的应用研究, 充分利用矩阵填充理论与稀疏阵列的差分伴随阵及自由度。

参考文献:

- [1] LIU Chunlin, VAIDYANATHAN P P. Cramer-Rao bounds for coprime and other sparse arrays, which find more sources than sensors[J]. Digital Signal Processing, 2017(61):43-61.
- [2] SHI Zhiguo, ZHOU Chengwei, GU Yujie, et al. Source estimation using coprime array: a sparse reconstruction perspective[J]. IEEE Sensors Journal, 2017, 17(3):755-765.
- [3] PAL P, VAIDYANATHAN P P. A grid-less approach to underdetermined direction of arrival estimation via low rank matrix denoising[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2014, 21(6):737-741.
- [4] ZHOU Chengwei, ZHOU Jinfang. Direction-of-arrival estimation with coarray ESPRIT for coprime array[J]. Sensors, 2017, 17(8):1779.
- [5] ABRAMOVICH Y I, SPENCER N K, GOROKHOV A Y. Positive-definite Toeplitz completion in DOA estimation for nonuniform linear antenna arrays. II. Partially augmentable arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47(6):1502-1521.
- [6] HOSSEINI M R, SEBT M A. Array interpolation using covariance matrix completion of minimum-size virtual array[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2017, 24(7):1063-1067.
- [7] LIU Chunlin, VAIDYANATHAN P P, PAL P. Coprime coarray interpolation for DOA estimation via nuclear norm minimization [C]// IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS). Montreal, QC, Canada: IEEE, 2016. doi: 10.1109/ISCAS.2016.7539135.
- [8] ZHOU Chengwei, GU Yujie, FAN Xing, et al. Direction-of-arrival estimation for coprime array via virtual array interpolation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2018, 66(22):5956-5971.
- [9] FAZEL M. Matrix rank minimization with applications[D]. San Francisco, USA: Stanford University, 2002.
- [10] 陈根华, 罗晓萱. 基于核范数最小的正定 Toeplitz 填充算法及稀疏阵列解模糊应用[J]. 南昌工程学院学报, 2020, 39(4):72-79. (CHEN Genhua, LUO Xiaoxuan. Positive definite Toeplitz completion via nuclear norm minimization and ambiguity resolution for sparse array[J]. Journal of Nanchang Institute of Engineering, 2020, 39(4):72-79.)
- [11] ZHENG Zhi, HUANG Yixiao, WANG Wenqin, et al. Spatial smoothing PAST algorithm for DOA tracking using difference coarray[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2019, 26(11):1623-1627.
- [12] QIAO Heng, PAL P. Gridless line spectrum estimation and low-rank Toeplitz matrix compression using structured samplers: a regularization-free approach[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(9):2221-2236.
- [13] 周成伟. 互质阵列信号处理算法研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2018. (ZHOU Chengwei. Coprime array signal processing[D]. Hangzhou, China: Zhejiang University, 2018.)

- [14] CAI Jianfeng, CANDES E J, SHEN Zuwei. A singular value thresholding algorithm for matrix completion[J]. SIAM Journal on Optimization, 2010,20(4):1956–1982.
- [15] BHASKAR B N, TANG G, RECHT B. Atomic norm denoising with applications to line spectral estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013,61(23):5987–5999.
- [16] TANG Gongguo, BHASKAR B N, RECHT B. Near minimax line spectral estimation[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2015,61(1):499–512.
- [17] WANG Mianzhi, NEHORAI A. Coarrays, MUSIC, and the Cramer–Rao bound[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(4):933–946.

作者简介：

陈根华(1980–)，男，博士，副教授，主要研究方向为阵列雷达信号处理。email:cghnit@126.com.

罗晓萱(1996–)，女，在读硕士研究生，主要研究方向为阵列信号处理。

(上接第331页)

- [15] 赵丹玲, 谭跃进, 李际超. 基于作战环的武器装备体系贡献评估[J]. 系统工程与电子技术, 2017,39(10):2239–2247. (ZHAO Danling, TAN Yuejin, LI Jichao. Armament system of systems contribution evaluation based on operation loop[J]. Systems Engineering and Electronics, 2017,39(10):2239–2247.)
- [16] 李小波, 林木, 束哲. 体系贡献率能效综合评估方法[J]. 系统仿真学报, 2018,30(12):4520–4527. (LI Xiaobo, LIN Mu, SHU Zhe. Synthesized capability–effectiveness evaluation method of contribution ratio to system–of–systems[J]. Journal of System Simulation, 2018,30(12):4520–4527.)
- [17] 胡晓峰, 张昱, 杨镜宇. 体系仿真试验床: 体系评估理论和方法的探索与实践[J]. 论证与研究, 2015,31(6):1–9. (HU Xiaofeng, ZHANG Yu, YANG Jingyu. SoS simulation testing bed: explosion and practice to the theory and method of evaluating SoS[J]. Demonstration and Research, 2015,31(6):1–9.)
- [18] 侯德亭, 祝民鹏, 胡涛. 警戒雷达干扰环境下效能评估方法[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2018,16(6):1008–1014. (HOU Deting, ZHU Minpeng, HU Tao. Effective evaluation method for warning radar in jamming environment[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2018,16(6):1008–1014.)
- [19] 胡晓峰, 杨镜宇, 张昱. 武器装备体系评估理论和方法的探索与实践[J]. 宇航总体技术, 2018,2(1):1–11. (HU Xiaofeng, YANG Jingyu, ZHANG Yu. SoS simulation testing bed: explosion and practice to the theory and method of evaluating weapon system of systems[J]. Astronautical Systems Engineering Technology, 2018,2(1):1–11.)
- [20] 季明, 马力. 面向体系效能评估的仿真实验因素与指标选取研究[J]. 军事运筹与系统工程, 2014,28(3):61–65. (JI Ming, MA Li. Study on testing element and index selection for SoS effectiveness evaluation[J]. Military Operations Research and Systems Engineering, 2014,28(3):61–65.)

作者简介：

周波(1982–)，男，硕士，助理研究员，主要研究方向为体系对抗。email:15803797570@139.com.

王建路(1984–)，男，博士，助理研究员，主要研究方向为雷达对抗。

孔德培(1974–)，男，硕士，副研究员，主要研究方向为电子对抗。

王雷钢(1980–)，男，博士，助理研究员，主要研究方向为电子对抗。

戴幻尧(1982–)，男，博士，研究员，主要研究方向为电子信息系统仿真与评估、雷达极化信息处理。